Bacalaureat, mai 2022
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Filiera teoretică, profilul real, matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați suma primilor zece termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_2 + a_9 = 10$.

5p **2.** Determinați modulul numărului complex $z = i(1-i)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x+1} + 2^{2-x} = 9$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie impar.

5p **5.** Se consideră punctele A, B și C astfel încât $\overrightarrow{AB} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$ și $\overrightarrow{BC} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$. Determinați lungimea vectorului $\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Știind că $tga = \sqrt{3}$ și $a \in \mathbb{R}$, arătați că $\dfrac{\sin a - \cos a}{\cos a + \sin a} = 2 - \sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(3)\right) = 10$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice număr natural $n, n \geq 2$ rangul matricei $A(n)$ este egal cu 3.

5p **c)** Arătați că inversa matricei $A(m)$ **nu** are toate elementele numere întregi, pentru orice număr natural m, $m \geq 2$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție asociativă $x \circ y = -2xy + 10x + 10y - 45$.

5p **a)** Arătați că $x \circ y = -2(x-5)(y-5) + 5$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Calculați $1 \circ 2 \circ 3 \circ \ldots \circ 2022$.

5p **c)** Determinați perechile de numere naturale (m, n) pentru care $m \circ n = 27$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 4x - \ln(x^2 + 1)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \dfrac{2(2x^2 - x + 2)}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este bijectivă.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=1-\dfrac{2x}{x^2+3}-\dfrac{2}{x^2+3}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 (x^2+3)\cdot f(x)dx=\dfrac{1}{3}$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 f(x)dx=1-\ln\dfrac{4}{3}-\dfrac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 f^n(x)dx$. Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=0$.

Bacalaureat, mai 2022
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 puncte)**

1.	$a_2+a_9=a_1+a_{10}=10$ $S_{10}=\frac{(a_1+a_{10})\cdot 10}{2}=\frac{(a_2+a_9)\cdot 10}{2}=\frac{10\cdot 10}{2}=50.$	**2p** **3p**
2.	$z=i(1-i)=i-i^2=1+i$ $\lvert z\rvert=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}.$	**2p** **3p**
3.	$2^{x+1}+2^{2-x}=9 \Leftrightarrow 2\cdot 2^x+\frac{4}{2^x}=9, 2^x=t$ $2t+\frac{4}{t}=9 \Leftrightarrow 2t^2-9t+4=0 \Rightarrow t_1=4,\ t_2=\frac{1}{2}$ $2^x=4 \Rightarrow x_1=2$ soluție $2^x=\frac{1}{2} \Rightarrow x_2=-1$ soluție.	**1p** **2p** **2p**
4.	nr. cazuri posibile=90 nr. cazuri favorabile=45 $P=\frac{nr.\text{ cazuri favorabile}}{nr.\text{ cazuri posibile}}=\frac{45}{90}=\frac{1}{2}.$	**2p** **2p** **1p**
5.	$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=6\vec{i}-8\vec{j}$ $\lvert\overrightarrow{AC}\rvert=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{6^2+8^2}=$ $=10.$	**2p** **2p** **1p**
6.	$\frac{\sin a-\cos a}{\cos a+\sin a}=\frac{\cos a(tga-1)}{\cos a(1+tga)}=\frac{tga-1}{tga+1}=$ $=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{3-1}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}.$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 puncte)**

1. a)	$A(3)=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(3))=\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=12+1-1-4-1+3=$	**3p**
	$=15-5=10$.	**2p**
b)	$A(n)=\begin{pmatrix}n & 1 & 1\\ 1 & n+1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $\det A(n)=\begin{vmatrix}n & 1 & 1\\ 1 & n+1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=n^2+n+1-1-n-1-1+n=n^2+n-2$ $n\geq 2 \Rightarrow n^2+n-2\geq 2^2+2-2=4 \Rightarrow \det A(n)\geq 4$	**2p**
	Deci, $rang A(n)=3$ pentru orice număr natural $n\geq 2$.	**1p**
c)	$A(m)\, inversabilă \Rightarrow A(m)\cdot A^{-1}(m)=I_3$, oricare $\mathrm{m}\geq 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow \det A(m)\cdot \det A^{-1}(m)=\det I_3 \Rightarrow \det A^{-1}(m)=\dfrac{1}{m^2+m-2}$	**3p**
	Dacă $A^{-1}(m)$ ar avea toate elementele numere întregi $\Rightarrow$ $\Rightarrow \det A^{-1}(m)\in\mathbb{Z} \Rightarrow \dfrac{1}{m^2+m-2}\in\mathbb{Z} \Rightarrow$ $\Rightarrow m^2+m-2\in\{1,-1\}$ Cum $m\geq 2 \Rightarrow m^2+m-2\geq 4$, deci $A^{-1}(m)$ nu are toate elementele numere întregi.	**2p**
2. a)	$x\circ y=-2xy+10x+10y-50+5=-2x(y-5)+10(y-5)+5=$	**3p**
	$=-2(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere reale x și y.	**2p**
b)	$x\circ 5=5,\ 5\circ y=5$ pentru orice numere reale x și y.	**2p**
	$1\circ 2\circ 3\circ ......\circ 2022=(1\circ 2\circ 3\circ 4\circ 5)\circ ......\circ 2022=5\circ(6\circ 7\circ ....\circ 2022)=5$.	**3p**
c)	$m\circ n=-2(m-5)(n-5)+5=27 \Rightarrow (m-5)(n-5)=-11$	**3p**
	Cum m și n sunt numere naturale, se obțin perechile $(16,4)$ și $(4,16)$.	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 puncte)**

1. a)	$f'(x)=(4x)'-\ln(x^2+1)'=4-\dfrac{1}{x^2+1}\cdot\left(x^2+1\right)'=4-\dfrac{2x}{x^2+1}=$	**3p**
	$=\dfrac{4x^2-2x+4}{x^2+1}=\dfrac{2\left(2x^2-x+2\right)}{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$.	**2p**

b)	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(4x-\ln(x^2+1)\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\ln e^{4x}-\ln\left(x^2+1\right)\right)=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\dfrac{e^{4x}}{x^2+1}=$ $=\ln(\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{4x}}{x^2+1})=\ln\infty=\infty.$	**3p** **2p**
c)	$f'(x)>0,\ x\in\mathbb{R}$ deci f este strict crescătoare $\Rightarrow$ $\Rightarrow f$ este injectivă $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty,\ f$ continuă $\Rightarrow \operatorname{Im} f=\mathbb{R}\Rightarrow$ $\Rightarrow f$ surjectivă f injectivă și surjectivă $\Rightarrow f$ bijectivă.	**2p** **2p** **1p**
2. a)	$\int_1^2\left(x^2+3\right)\cdot f(x)\,dx=\int_1^2\left(x^2+3-2x-2\right)dx=\left.\dfrac{x^3}{3}\right\|_1^2-\left.x^2\right\|_1^2+\left.x\right\|_1^2=$ $=\dfrac{8}{3}-\dfrac{1}{3}-4+1+2-1=\dfrac{1}{3}.$	**3p** **2p**
b)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(1-\dfrac{2x}{x^2+3}-\dfrac{2}{x^2+3})dx=\int_0^1 1dx-\int_0^1\dfrac{2x}{x^2+3}dx-2\int_0^1\dfrac{1}{x^2+3}dx=$ $=\left.x\right\|_0^1-\left.\ln\left(x^2+3\right)\right\|_0^1-\left.\dfrac{2}{\sqrt{3}}arctg\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right\|_0^1=$ $=1-0-\ln 4+\ln 3-\dfrac{2}{\sqrt{3}}arctg\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\dfrac{2}{3}arctg0=$ $=1-\ln\dfrac{4}{3}-\dfrac{\pi\sqrt{3}}{9}.$	**3p** **2p**
c)	$f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+3}\Rightarrow 0\le\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+3}\le\dfrac{1}{3}$, pentru orice $x\in[0,1]$ deci $0\le f^n(x)\le\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$, pentru orice $x\in[0,1]$, $n\in\mathbb{N}$ nenul $0\le I_n=\int_0^1 f^n(x)dx\le\int_0^1\left(\dfrac{1}{3}\right)^n dx=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$, pentru orice număr natural nenul n și cum $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty} I_n=0$.	 **2p** **3p**