Bacalaureat, mai 2022
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii ***Simulare***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numărul $\left(\frac{1}{1-i}-\frac{1}{1+i}\right)^2$ este real.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-\frac{2x}{x^2+1}$. Arătați că $f(x)\le 1$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{2x+1}-10\cdot 3^{x+1}+27=0$.

5p **4.** Determinați numărul funcțiilor $f:\{0,1,2,3\}\to\{0,1,2,3\}$ cu proprietatea $f(0)=f(1)$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,-1)$, $B(-1,1)$, $C(1,3)$. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul C și este paralelă cu dreapta AB.

5p **6.** Determinați numerele reale $x\in[0,\pi]$, pentru care $\sin 2x=\sin x$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră mulțimea $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&1\\3&3\end{pmatrix}$ și $M(a)=I_2+aA$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(M(1))=5$.

5p **b)** Arătați că $M(a)\cdot M(b)=M(a+b+4ab)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați numerele reale a pentru care $M(a)\cdot M(a)=M(2)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x\circ y=3xy-2x-2y+2$.

5p **a)** Arătați că $x\circ y=3\left(x-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(y-\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Arătați că $x\circ x\ge\frac{2}{3}$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $x\circ x\circ x=e$, unde e este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-\ln x+x$.

5p **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=e$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este convexă .

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x(x+2)e^x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 \frac{f(x)}{e^x}dx=\frac{4}{3}$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul n, știind că $\int_1^n \frac{(x+1)\cdot e^x}{f(x)}dx=\frac{3\ln 2}{2}$.

Bacalaureat, mai 2022
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(\frac{1}{1-i}-\frac{1}{1+i}\right)^2=\left(\frac{1+i}{(1-i)(1+i)}-\frac{1-i}{(1-i)(1+i)}\right)^2=\left(\frac{1+i}{2}-\frac{1-i}{2}\right)^2=\left(\frac{2i}{2}\right)^2=$ $=i^2=-1$	**3p** **2p**
2.	$f(x)-1=-\frac{2x}{x^2+1}-1=-\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}=-\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$ Cum $\frac{(x+1)^2}{x^2+1}\geq 0$ pentru orice număr real x, obținem $f(x)\leq 1$, pentru orice număr real x.	**3p** **2p**
3.	$3^{2x+1}-10\cdot 3^{x+1}+27=0 \Leftrightarrow 3\cdot 3^{2x}-30\cdot 3^x+27=0 \Leftrightarrow t^2-10t+9=0$, unde $3^x=t$ $\Rightarrow t_1=1,\ t_2=9$ $3^x=1\Rightarrow x_1=0$ și $3^x=9\Rightarrow x_2=2$ soluții.	**2p** **1p** **2p**
4.	$f(0)=f(1)$ pot fi alese în patru moduri și pentru fiecare alegere, numerele $f(2)$ și $f(3)$ pot fi alese în 4^2 moduri. Există $4\cdot 4^2=64$ de funcții.	**3p** **2p**
5.	$m_d=m_{AB}$ și cum $m_{AB}=-\frac{2}{3}$ obținem $m_d=-\frac{2}{3}$ $y-y_c=m_d(x-x_c)\Leftrightarrow y-3=-\frac{2}{3}(x-1)\Leftrightarrow$ Ecuația dreptei d este $2x+3y-11=0$.	**2p** **3p**
6.	$2\sin x\cos x=\sin x \Leftrightarrow \sin x(2\cos x-1)=0$ Cum $x\in[0,\pi]$, obținem $x=0$, $x=\frac{\pi}{3}$ sau $x=\pi$.	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. a)	$\det(M(1))=\det\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\3&3\end{pmatrix}\right)=\det\begin{pmatrix}2&1\\3&4\end{pmatrix}=2\cdot4-3\cdot1=$ $=8-3=5$.	**3p** **2p**
b)	$M(a)\cdot M(b)=(I_2+aA)\cdot(I_2+bA)=I_2+aA+bA+abA^2$ și cum $A^2=4A\ \Rightarrow$ $\Rightarrow M(a)\cdot M(b)=I_2+(a+b+4ab)A=M(a+b+4ab)$, pentru orice numere reale a și b.	**2p** **1p** **2p**
c)	$M(a)\cdot M(a)=M(2a+4a^2)=M(2)\Rightarrow 4a^2+2a=2\Rightarrow$ $\Rightarrow 2a^2+a-1=0\Rightarrow a_1=-1$ și $a_2=\frac{1}{2}$.	**2p** **3p**
2. a)	$x\circ y=3\left(xy-\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}\right)=3\left[x\left(y-\frac{2}{3}\right)-\frac{2}{3}\left(y-\frac{2}{3}\right)-\frac{4}{9}+\frac{2}{3}\right]=$ $=3\left[x\left(y-\frac{2}{3}\right)-\frac{2}{3}\left(y-\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{9}\right]=3\left[\left(x-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(y-\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{9}\right]=\ 3\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(y-\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}$, pentru orice numere reale x și y.	**2p** **3p**
b)	$x\circ x=3xx-2x-2x+2=3x^2-4x+2$ $3x^2-4x+2\geq\frac{2}{3}\Leftrightarrow 9x^2-12x+4\geq0\Leftrightarrow(3x-2)^2\geq0$, pentru orice număr real x.	**2p** **3p**
c)	$x\circ e=e\circ x=x$, pentru orice $x\Rightarrow e=1$ $x\circ x\circ x\Leftrightarrow 9\left(x-\frac{2}{3}\right)^3+\frac{2}{3}=1\Leftrightarrow\left(x-\frac{2}{3}\right)^3=\frac{1}{27}\Leftrightarrow x=1$.	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. a)	$\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$ $f'(x)=e^{x'}-\ln x'+x'=e^x-\frac{1}{x}+1$, $f'(1)=e\Rightarrow$ $\Rightarrow\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=e$.	**2p** **3p**
b)	Tangenta la graficul funcției în punctul $(1,f(1))$ are ecuația $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Rightarrow$ $f(1)=e+1, f'(1)=e\Rightarrow y-e-1=e(x-1)\Rightarrow$ ecuația tangentei este $ex-y+1=0$.	**2p** **3p**
c)	$f''(x)=e^x+\frac{1}{x^2}$, $x\in(0,\infty)$ $f''(x)>0$, pentru orice $x\in(0,\infty)$, deci funcția f este convexă.	**2p** **3p**

2. a)	$\int_0^1 \frac{f(x)}{e^x}dx = \int_0^1 \frac{x(x+2)e^x}{e^x}dx = \int_0^1 (x^2+2x)dx = \int_0^1 x^2dx + \int_0^1 2xdx =$ $= \frac{x^3}{3}\Big\|_0^1 + x^2\Big\|_0^1 = \frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$.	**3p** **2p**
b)	$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x^2+2x)e^{x\prime}dx = (x^2+2x)e^x\Big\|_0^1 - \int_0^1 (2x+2)e^x dx =$ $= 3e - \left((2x+2)e^x\Big\|_0^1 - 2\int_0^1 e^x dx\right) = 3e-(4e-2-2e+2)=e.$	**2p** **3p**
c)	$\int_1^n \frac{(x+1)e^x}{f(x)}dx = \int_1^n \frac{x+1}{x^2+2x}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x)\Big\|_1^n = \frac{1}{2}\ln\frac{n^2+2n}{3}$ $\frac{1}{2}\ln\frac{n^2+2n}{3} = \frac{3\ln 2}{2} \Rightarrow n^2+2n-24=0$, obținem $n=4$ deoarece este număr natural nenul.	**3p** **2p**