12.05.2022

Colegiul Naţional de Informatică ,,Tudor Vianu"
Concursul ,,Micii Campioni" – 2022
Ziua 1

Problema 1. Determinaţi cifrele distincte a, b, c, d ştiind că:
$$\overline{abba} + a + b = \overline{cdda}.$$

Problema 2. Trei elevi au scris fiecare câte o listă de 50 de cuvinte diferite. După aceea, confruntând listele, s-au şters cuvintele care s-au găsit de cel puţin două ori. Ca rezultat, unul a rămas cu 27 de cuvinte, altul cu 38 iar al treilea cu 34. Să se demonstreze că cel puţin un cuvânt a fost scris de cei trei elevi.

Problema 3. Ana are o cutie cu bomboane. Ea ia de cinci ori bomboane din cutie astfel:

- de fiecare dată ia mai multe bomboane decât luase data precedentă;
- prima dată a luat de trei ori mai puţine bomboane decât a luat a cincea oară;
- în total a luat 31 de bomboane.

Câte bomboane a luat Ana a patra oară din cutie?

Problema 4. Un ceas electronic afişează timpul în intervalul de la $00:00:00$ la $23:59:59$. De câte ori, în acest interval, apare pe ecranul ceasului o secvenţă de cifre care se scrie la fel de la stânga spre dreapta ca şi de la dreapta spre stânga? (Un astfel de exemplu este $01:55:10$)

Problema 5. Într-o clasă, nişte elevi au organizat un turneu de şah. Turneul s-a desfăşurat după regula ,,fiecare elev joacă câte o partidă cu fiecare dintre ceilalţi elevi". În timpul desfăşurării turneului, doi elevi care jucaseră acelaşi număr de partide s-au îmbolnăvit şi s-au retras din turneu, iar ceilalţi au continuat turneul până la sfârşit. Ştiind că în turneu s-au jucat 23 de partide, determinaţi dacă cei doi elevi care s-au îmbolnăvit au jucat între ei până la momentul retragerii lor din turneu.

Timp de lucru 2 ore.
Fiecare problemă valorează 15 puncte.

12.05.2022

Colegiul Naţional de Informatică ,,Tudor Vianu"
Concursul ,,Micii Campioni" – 2022
Ziua 1

Problema 1. Determinaţi cifrele distincte a, b, c, d ştiind că:

$$\overline{abba} + a + b = \overline{cdda}.$$

Soluţie şi barem orientativ Deoarece numerele $\overline{abba}$ şi $\overline{cdda}$ se termină cu aceeaşi cifră rezultă că $a+b$ se termină în 0, adică $a+b=10$ şi implicit $\overline{abba}+10 = \overline{cdda}$ **5p**

Observăm că primele cifre ale numerelor $\overline{abba}$ şi $\overline{cdda}$ sunt diferite, de unde rezultă că a fost o trecere peste mie **3p**

Dar acest lucru este posibil doar când $b = 9$ **3p**

De aici obţinem $a = 1$, $c = 2$ şi $d = 0$ **4p**

Observaţie: Orice determinare corectă a cifrelor a, b, c, d fără justificări se punctează cu 3 puncte.

Problema 2. Trei elevi au scris fiecare câte o listă de 50 de cuvinte diferite. După aceea, confruntând listele, s-au şters cuvintele care s-au găsit de cel puţin două ori. Ca rezultat, unul a rămas cu 27 de cuvinte, altul cu 38, iar al treilea cu 34. Să se demonstreze că cel puţin un cuvânt a fost scris de cei trei elevi.

Soluţie şi barem orientativ Presupunem contrariul. Atunci fiecare cuvânt şters a fost scris de exact doi elevi. **4p**

Dacă un cuvânt este şters, atunci el este şters de exact doi elevi şi prin urmare numărul cuvintelor şterse este par. **4p**

Iniţial numărul cuvintelor scrise este 150, adică număr par. Deci şi numărul cuvintelor rămase trebuie să fie par. **4p**

Însă din enunţul problemei a rămas un număr impar de cuvinte $27+38+34 = 99$, contradicţie. **3p**

Problema 3. Ana are o cutie cu bomboane. Ea ia de cinci ori bomboane din cutie astfel:

- de fiecare dată ia mai multe bomboane decât luase data precedentă;
- prima dată a luat de trei ori mai puţine bomboane decât a luat a cincea oară;
- în total a luat 31 de bomboane.

Câte bomboane a luat Ana a patra oară din cutie?

Soluţie şi barem orientativ Notăm cu a, b, c, d şi e numărul de bomboane pe care Ana îl ia din cutie succesiv, începând cu prima dată şi terminând cu a cincea oară.

Avem $a < b < c < d < e$, $e = 3a$ şi $a+b+c+d+e = 31$ **1p**

Dacă $a \geq 4$, atunci $b \geq 5$, $c \geq 6$, $d \geq 7$, $e \geq 12$ şi cum $a+b+c+d+e \geq 4+5+6+7+12 = 34 > 31$, contradicţie **4p**

Dacă $a \leq 2$, atunci $e \leq 6$ şi $d \leq 5$, $c \leq 4$, $b \leq 3$ şi cum $a+b+c+d+e \leq 2+3+4+5+6 = 20 < 31$, contradicţie. Prin urmare, $a = 3$ şi $e = 9$ **4p**

Dacă $d \leq 7$, atunci $c \leq 6$ şi $b \leq 5$ şi cum $a+b+c+d+e \leq 3+5+6+7+9 = 30 < 31$, contradicţie **4p**

Deci $d = 8$, iar un exemplu valid este următorul:
$a = 3$, $b = 5$, $c = 6$, $d = 8$, $e = 9$ **2p**

Problema 4. Un ceas electronic afişează timpul în intervalul de la $00:00:00$ la $23:59:59$. De câte ori, în acest interval, apare pe ecranul ceasului o secvenţă de cifre care se scrie la fel de la stânga spre dreapta ca şi de la dreapta spre stânga? (Un astfel de exemplu este $01:55:10$)

Soluţie şi barem orientativ Dacă pe ecran apare secvenţa $ab:cd:ef$, atunci $0 \leq a \leq 2$, $0 \leq b \leq 9$, $0 \leq c \leq 5$, $0 \leq d \leq 9$, $0 \leq e \leq 5$, $0 \leq f \leq 9$ **3p**

Deoarece $a = f$, $b = e$ şi $c = d$, atunci o astfel de secvenţă este determinată de cifrele a, b şi c, unde $0 \leq a \leq 2$, $0 \leq b \leq 5$ şi $0 \leq c \leq 5$ **4p**

Dacă $a = 0$ sau $a = 1$, atunci b şi c sunt cifre de la 0 la 5, în total sunt $2 \cdot 6 \cdot 6 = 72$ de secvenţe **4p**

Dacă $a = 2$, atunci $0 \leq b \leq 3$ şi $0 \leq c \leq 5$ şi numărul acestor secvenţe este de $4 \cdot 6 = 24$ **3p**

În total sunt $72 + 24 = 96$ de secvenţe **1p**

Problema 5. Într-o clasă, nişte elevi au organizat un turneu de şah. Turneul s-a desfăşurat după regula ,,fiecare elev joacă câte o partidă cu fiecare dintre ceilalţi elevi". În timpul desfăşurării turneului, doi elevi care jucaseră acelaşi număr de partide s-au îmbolnăvit şi s-au retras din turneu, iar ceilalţi au continuat turneul până la sfârşit. Ştiind că în turneu s-au jucat 23 de partide, determinaţi dacă cei doi elevi care s-au îmbolnăvit au jucat între ei până la momentul retragerii lor din turneu.

Soluţie şi barem orientativ Notăm cu A şi B elevii care s-au îmbolnăvit. 6 elevi care joacă între ei ,,fiecare cu fiecare" vor juca împreună $6 \times 5 : 2 = 15$ partide **1p**

7 elevi care joacă între ei ,,fiecare cu fiecare" câte o partidă, vor juca împreună $6 \times 7 : 2 = 21$ de partide **1p**

8 elevi care joacă între ei ,,fiecare cu fiecare" câte o partidă, vor juca împreună $7 \times 8 : 2 = 28$ de partide **1p**

Prin urmare, în turneu, în afară de A şi B, au participat 6 sau 7 elevi **3p**

<u>**Caz I**</u> Dacă în turneu au fost 8 elevi, atunci numărul partidelor jucate împreună de A şi B ar fi fost $23 - 15 = 8$ partide **3p**

<u>**Caz II**</u> Dacă în turneu au fost 9 elevi, atunci numărul partidelor jucate împreună de A şi B ar fi fost $23 - 21 = 2$ partide **3p**

Dacă elevii A şi B ar fi jucat între ei, atunci ar fi jucat cu ceilalţi participanţi 7 partide, în primul caz, şi o partidă în cazul al doilea. Deci nu ar fi putut juca acelaşi număr de partide fiecare **3p**

Răspuns: Elevii care s-au retras nu au jucat între ei.

Orice soluţie alternativă completă a oricărei probleme va primi punctaj maxim. Orice soluţie alternativă incompletă va fi punctată corespunzător.