MINISTERUL EDUCAȚIEI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA JUDEȚEANĂ
26 martie 2022

Filiera tehnologică – toate profilurile

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
Clasa a IX –a

Subiectul 1.

Se consideră o progresie aritmetică $(a_n)_{n\ge1}$ cu termeni pozitivi.

a) Calculați suma primilor 30 de termeni ai progresiei aritmetice dacă $a_{11}+a_{14}+a_{17}+a_{20}=182$.

b) Știind că $S=1+\dfrac{a_2}{\sqrt{a_1a_3}}+\dfrac{a_3}{\sqrt{a_2a_4}}+\dfrac{a_4}{\sqrt{a_3a_5}}+...+\dfrac{a_n}{\sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}}$ cu $n\in\mathbb{N}, n\ge 2$, demonstrați că $S\ge n$.

SOLUȚIE:

a) $S_{30}=\dfrac{(2a_1+29r)\cdot 30}{2}$ 1p

$a_{11}+a_{14}+a_{17}+a_{20}=182 \Leftrightarrow 2a_1+29r=91$ 2p

Finalizare $S_{30}=1365$ 1p

b) Din inegalitatea mediilor$\Rightarrow \dfrac{a_i}{\sqrt{a_{i-1}a_{i+1}}}=\dfrac{\frac{a_{i-1}+a_{i+1}}{2}}{\sqrt{a_{i-1}a_{i+1}}}=\dfrac{m_a}{m_g}\ge 1$ 2p

Se obține $S\ge 1+\underbrace{(1+1+...+1)}_{de\ n-1\ ori}=n\Rightarrow S\ge n$ 1p

Subiectul 2.

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=4x+1$ și numărul $S_n=\dfrac{1}{f(0)\cdot f(1)}+\dfrac{1}{f(1)\cdot f(2)}+...+\dfrac{1}{f(n-1)\cdot f(n)}$, unde n este un număr natural nenul.

a) Verificați egalitatea: $\dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{4n-3}-\dfrac{1}{4n+1}\right)$, pentru orice număr natural nenul n.

b) Demonstrați că $S_n=\dfrac{n}{4n+1}$, unde n este un număr natural nenul.

c) Fie "$\circ$" operația de compunere a funcțiilor. Arătați că $\left(\underbrace{f\circ f\circ...\circ f}_{de\ n\ ori}\right)(x)=4^nx+4^{n-1}+4^{n-2}+...+4+1$, pentru orice număr natural $n\ge 2$.

SOLUȚIE:

a) Verificarea egalității 1p

b) $\dfrac{1}{f(i-1)\cdot f(i)}=\dfrac{1}{(4i-3)(4i+1)}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{4i-3}-\dfrac{1}{4i+1}\right)$ pentru $i=\overline{1,n}$ 2p

Însumează cele n relații și se obține $S_n=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{4n+1}\right)\Leftrightarrow S_n=\dfrac{n}{4n+1}$ 2p

c) Aplică inducția matematică . Etapa verificării, pentru *n=2*....................1p

Etapa demonstrației și concluzia 1p

Subiectul 3.

Se consideră triunghiul *ABC*, punctul *D* fiind mijlocul laturii *AC* și punctul *M* astfel încât $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

a) Arătați că $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MD}$.

b) Demonstrați că $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

c) Arătați că dreptele *MD* și *AB* sunt paralele.

SOLUȚIE:

a) D = milocul segmentului $AC \Rightarrow \overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ 1p

$\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MD}$ 1p

b) $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right)+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=2\left(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)$. Din $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\left(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=\vec{0} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=\vec{0}$ 2p

c) $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{MA}+2\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)+3\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ 1p

Obține $3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right)+2\overrightarrow{AB}=\vec{0} \Leftrightarrow 6\overrightarrow{MD}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ 1p

Finalizează $\overrightarrow{MD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA} \Rightarrow \overrightarrow{MD}$ și $\overrightarrow{BA}$ coliniari, deci $MD \parallel AB$ 1p

Subiectul 4.

Pe o suprafață plană, un robot sare din punctul A_1 în punctul A_2, lungimea saltului (distanța de la A_1 la A_2) fiind egală cu 3 cm. El continuă să sară astfel încât lungimea fiecărei sărituri este de două ori mai mare decât precedenta.

a) Care este lungimea traseului parcurs de robot după 10 sărituri?

b) Poate să ajungă robotul după un număr de sărituri iar în punctul A_1?

SOLUȚIE:

a) Notând $A_1A_2=x=3cm$ avem $A_1A_2=x,\ A_2A_3=2x,\ A_3A_4=2^2x\ ,...,A_{n-1}A_n=2^{n-2}x$ 1p

$A_1A_2+A_2A_3+...+A_{10}A_{11}=x+2x+2^2x+...+2^9x=\left(2^{10}-1\right)\cdot 3=3069$ cm 2p

b) $\left|\overrightarrow{A_1A_n}\right|=\left|\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+...+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}\right|\le\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|+\left|\overrightarrow{A_2A_3}\right|+...+\left|\overrightarrow{A_{n-1}A_n}\right|$ 2p

Dacă robotul s-ar întoarce în A_1, atunci $A_nA_1=2^{n-1}x$ și rezultă

$2^{n-1}x\le x+2x+2^2x+...+2^{n-2}x \Leftrightarrow 2^{n-1}x\le\left(2^{n-1}-1\right)x$ 1p

Se obține $x\le 0$, ceea ce este fals, deci robotul nu poate ajunge din nou în A_1 ....1p