



**CONCURSUL NAȚIONAL  
DE MATEMATICĂ APLICATĂ  
"ADOLF HAIMOVICI"**



FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

**ETAPA JUDEȚEANĂ**  
**26 martie 2022**  
Filiera tehnologică – toate profilurile

**BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE**

**Clasa a X -a**

**Subiectul 1.**

- a) Demonstrați că  $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a$  este număr natural, oricare ar fi numerele reale  $a, b, c$  strict pozitive și diferite de 1.
- b) Rezolvați ecuația  $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \dots \cdot \log_{n-1} n = 10$ , dacă știm că  $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ .

**SOLUȚIE:**

- a) Se transformă în baza  $e$  sau în altă bază  $\Rightarrow \log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = \frac{\ln b}{\ln a} \cdot \frac{\ln c}{\ln b} \cdot \frac{\ln a}{\ln c} = 1$  .....3p
- b)  $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \dots \cdot \log_{n-1} n = 10 \Leftrightarrow \frac{\ln 3}{\ln 2} \cdot \frac{\ln 4}{\ln 3} \cdot \frac{\ln 5}{\ln 4} \cdot \dots \cdot \frac{\ln n}{\ln(n-1)} = 10$  .....2p
- Obține  $\log_2 n = 10$  .....1p
- Finalizează  $n = 2^{10}$  ce verifică condițiile din datele problemei.....1p

**Subiectul 2.**

- a) Se dau cifrele 0, 1, 2, 3, 4. Câte numere de 3 cifre distincte se pot scrie cu aceste cifre? Dintre numerele găsite anterior, câte sunt divizibile cu 10?
- b) Determinați rangul termenului din dezvoltarea  $\left( \sqrt[3]{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} \right)^{43}$  pentru care  $x$  și  $y$  au exponenți egali.

**SOLUȚIE:**

- a)  $A_5^3 =$  numărul aranjărilor de 3 cifre distincte,  $A_4^2 =$  numărul aranjărilor cu 0 pe prima poziție .....1p
- $A_5^3 - A_4^2 = 48$  numere de trei cifre distincte .....1p
- Numerele divizibile cu 10 sunt în număr de  $A_4^2 = 12$  .....1p
- b)  $\sqrt[3]{\frac{x}{y}} = x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{-\frac{1}{9}}, \sqrt{\frac{y}{x}} = y^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$  .....1p
- Termenul general este  $T_{k+1} = (-1)^k C_{43}^k \cdot x^{\frac{86-5k}{6}} \cdot y^{\frac{13k-172}{36}}$  .....2p
- Egalând exponenții lui  $x$  și  $y$ , se obține  $k = 16 \Rightarrow T_{17} = -C_{43}^{16} \cdot x \cdot y$  este termenul cerut .....1p

**Subiectul 3.**

Se dau numerele complexe  $z_1 = -2 + 2i$ ,  $z_2 = 2 + 2i$ .

- Demonstrați că  $z_1^{2022} + z_2^{2022} = 0$ .
- Demonstrați că originea  $O$  a reperului cartezian  $(xOy)$  se află pe mediatoarea segmentului  $[AB]$ , unde  $A$  și  $B$  sunt afixele numerelor complexe  $z_1$ , respectiv  $z_2$ .

**SOLUȚIE:**

- $z_1^{2022} = (-2 + 2i)^{2022} = 2^{2022} (-1 + i)^{2022} = 2^{3033} i$  ..... 1p  
 $z_2^{2022} = (2 + 2i)^{2022} = 2^{2022} (1 + i)^{2022} = -2^{3033} i$  ..... 1p  
 Finalizează  $z_1^{2022} + z_2^{2022} = 0$  ..... 1p
- Reprezentarea geometrică a punctelor  $A$  și  $B$  ..... 1p  
 Condiția ca punctul  $O$  să fie pe mediatoarea segmentului  $AB$  este ca el să fie egal departat de capetele segmentului, adică  $OA = OB$  ..... 1p  
 $OA = |z_0 - z_A| = 2\sqrt{2}$  ..... 1p  
 $OB = |z_0 - z_B| = 2\sqrt{2}$  ..... 1p

**Subiectul 4.**

Se dau funcțiile  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(t) = -2^{\frac{t}{10}-2}$  și  $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(t) = \log_3(t+1)$  care reprezintă legile după care scad, respectiv se măresc temperaturile exprimate în grade Celsius, în interiorul unei camere frigorifice în funcție de timpul  $t$ , exprimat în minute, atunci când instalația de răcire a acesteia funcționează sau este oprită. Știind că în momentul punerii în funcțiune a instalației, în interiorul camerei frigorifice erau  $12^\circ\text{C}$ , determinați:

- Temperatura din interiorul camerei frigorifice după 70 de minute de funcționare continuă a instalației frigorifice.
- Dacă după cele 70 de minute de funcționare, instalația de răcire se oprește, în cât timp temperatura din interiorul camerei frigorifice ajunge la  $-16^\circ\text{C}$  ?

**SOLUȚIE:**

- Când pornește instalația frigorifică, temperatura scade, deci variația temperaturii este dată de funcția  $f$  ..... 1p  
 După 70 de minute de funcționare temperatura va fi  $T = 12 + f(70) = 12 - 2^5 = -20^\circ\text{C}$  ..... 2p
- Dacă instalația de răcire se oprește, temperatura în camerei frigorifice începe să crească deci variația acesteia va fi dată de funcția  $g$  ..... 1p  
 După oprirea instalației, temperatura crește pornind de la  $-20^\circ$  (după cum am calculat la punctul a)) .  
 Se obține  $-20 + g(t) = -16 \Leftrightarrow g(t) = 4 \Leftrightarrow \log_3(t+1) = 4$  ..... 2p  
 Obține  $t = 80$  minute ..... 1p