MINISTERUL EDUCAȚIEI

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA JUDEȚEANĂ
26 martie 2022
Filiera tehnologică – toate profilurile

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
Clasa a XI -a

Subiectul 1.

Se consideră matricele $A(a)=\begin{pmatrix} \frac{a+1}{2} & \frac{a-1}{2} \\ \frac{a-1}{2} & \frac{a+1}{2} \end{pmatrix}$, unde $a \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

a) Arătaţi că $A(a)\cdot A(b)=A(ab),\ \forall a,b\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

b) Determinaţi $A^n(a),\ n\in\mathbb{N}^*$.

c) Demonstraţi că $\det A(2)+\det A^2(2)+\det A^3(2)+...+\det A^{2022}(2)<2^{2023}$.

SOLUŢIE:

a) Demonstrează $A(a)\cdot A(b)=A(ab),\ \forall a,b\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ 2p

b) Deduce că $A^n(a)=A(a^n),\ \forall a\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ și $\forall n\in\mathbb{N}^*$ 1p

Demonstrează prin inducție că $A^n(a)=A(a^n), \forall a\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ și $\forall n\in\mathbb{N}^*$ 1p

c) Din $\det A(a)=a \Rightarrow \det A^n(a)=a^n, \forall n\in\mathbb{N}^*$ 1p

Obține $\det A(2)+\det A^2(2)+\det A^3(2)+...+\det A^{2022}(2)=2+2^2+2^3+...+2^{2022}$ 1p

Finalizare $\det A(2)+\det A^2(2)+\det A^3(2)+...+\det A^{2022}(2)=2^{2023}-2<2^{2023}$ 1p

Subiectul 2.

Se consideră funcția $f:D\to\mathbb{R}, f(x)=x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

a) Stabiliți D, domeniul maxim de definiție a funcției f.

b) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=2$.

c) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right]^x$.

SOLUȚIE:

a) Din condiția $\frac{x-1}{x+1}\geq 0$ se obține $D=(-\infty,-1)\cup[1,\infty)$ 1p

b) Determină $f'(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{x}{(x+1)^2}, x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ 2p

Determină $f'(2)=\frac{5\sqrt{3}}{9}$ și $f(2)=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 1p

Obține ecuația tangentei $5\sqrt{3}x-9y-4\sqrt{3}=0$ 1p

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right]^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}}$ 1p

$e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x}{x+1+\sqrt{x^2-1}}}=e^{-1}$ 1p

Subiectul 3.

Fie funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln\frac{x}{x+1}$.

a) Arătați că $f'(x)=\frac{1}{x(x+1)}, x\in(0,\infty)$.

b) Demonstraţi că $f'(1)+f'(2)+...+f'(2022)\in(0,1)$.

c) Scrieţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=e^{f(x)}$, ştiind că aceasta trece prin punctul $A(-1,0)$.

SOLUȚIE:

a) Obține $f'(x)=\frac{1}{x(x+1)}, x\in(0,\infty)$ 1p

b) Din $f'(x)=\frac{1}{x(x+1)}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$ 1p

Se obține $f'(1)+f'(2)+...+f'(2022)=1-\frac{1}{2023}$ 1p

Finalizează $f'(1)+f'(2)+...+f'(2022)=\frac{2022}{2023}\in(0,1)$ 1p

c) Determină $g(x)=\frac{x}{x+1}$ și $g'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$, $x\in(0,\infty)$ 1p

Ecuaţia tangentei d în punctul de abscisă $x_0\in(0,\infty)$ este $y-\frac{x_0}{x_0+1}=\frac{1}{(x_0+1)^2}(x-x_0)$ 1p

Din $A(-1,0)\in d$, obţine $x_0=1$ şi găseşte $(d): x-4y+1=0$ 1p

Subiectul 4.

O masă de biliard este reprezentată schematic într-un reper cartezian *(xOy)* printr-un dreptunghi *OABC* astfel încât $A\in Oy$, $C\in Ox$, $OA=2a$, $OC=a$ şi $a\in(0,\infty)$.

a) Determinaţi coordonatele punctului *P* în care este situată o bilă albă ştiind că acesta se află la distanţa $\frac{a}{2}$ faţă de *AB* şi la distanţa $\frac{a}{2}$ faţă de *BC*.

b) Determinaţi coordonatele punctului *M* de pe latura *BC* a mesei, în care trimitem bila *P* astfel încât ea să ricoşeze în buzunarul din punctul *O*.

c) Determinaţi cel mai mic număr întreg *a* pentru care aria triunghiului determinat de poziţia iniţială a bilei, punctul *M* şi buzunarul *O* este un număr natural.

SOLUȚIE:

a) Determină punctele $A(0,2a), C(a,0), B(a,2a)$ 1p

Deduce $P\left(\frac{a}{2},\frac{3a}{2}\right)$ 1p

b) Din $M\in BC\Rightarrow M(a,y), y>0$ 1p

Dacă $\{N\}=PM\cap BC\Rightarrow N(2a,0)$ 1p

Din *P, M, N* coliniare rezultă $\begin{vmatrix}\frac{a}{2} & \frac{3a}{2} & 1\\ a & y & 1\\ 2a & 0 & 1\end{vmatrix}=0$ şi obţine *M(a,a)* 1p

c) Calculează $\Delta=\begin{vmatrix}\frac{a}{2} & \frac{3a}{2} & 1\\ a & a & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=-a^2$ 1p

Aria triunghiului *POM* este $A=a^2/2$ şi obţine $a=2$ 1p