Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră numerele complexe $z_1 = 1 - 2i$ și $z_2 = 2 + i$. Arătați că $(z_1 + i)(z_2 - 1) = 2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x + m$, unde m este număr real. Determinați valorile reale ale lui m pentru care $f(x) > 0$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $1 + 2\log_2\sqrt{x-2} = \log_2 x$.

5p **4.** Se consideră mulțimea A, a numerelor naturale de două cifre. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea A, acesta să aibă exact doi multipli în mulțimea A.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,-2)$, $B(3,1)$ și $M(2,4)$. Determinați coordonatele punctului N, știind că patrulaterul $ABMN$ este paralelogram.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, în care $\sin(A+B) + \cos C = 1$. Arătați că triunghiul ABC este dreptunghic.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 2 & 1 & -1 \\ a & 3 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x + 3y + az = 2 \\ 2x + y - z = -1 \\ ax + 3y + z = 1 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1)) = 0$.

5p **b)** Arătați că $B(a)\cdot B(a)\cdot B(a) = a^3 B(1)$, pentru orice număr real a, unde $B(a) = A(a) - A(0)$.

5p **c)** Demonstrați că, dacă sistemul de ecuații are o infinitate de soluții, atunci $x_0y_0 + y_0z_0 + z_0x_0 \le 0$, pentru orice soluție (x_0, y_0, z_0) a sistemului de ecuații, cu x_0, y_0 și z_0 numere reale.

2. Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție $z_1 * z_2 = \dfrac{z_1 + z_2}{4\cdot|z_1z_2| + 1}$.

5p **a)** Arătați că $(-1) * 2 = \dfrac{1}{9}$.

5p **b)** Arătați că $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Demonstrați că există cel puțin trei numere complexe distincte și nenule care verifică egalitatea $|z * z| = |z|$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4+16}}{x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \dfrac{(x^2-4)(x^2+4)}{x^2\sqrt{x^4+16}}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care ecuația $f(x)+f\left(\frac{4}{x}\right)=m$ are exact două soluții.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+1}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^3 e^x f(x)\,dx=12$.

5p **b)** Arătați că orice primitivă G a funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ este convexă.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{e^x f(x)}}\,dx=\frac{a-\sqrt{2}}{3}$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(z_1+i)(z_2-1)=(1-2i+i)(2+i-1)=(1-i)(1+i)=$	**2p**
	$=1-i^2=2$	**3p**
2.	$\Delta<0$ și, cum $\Delta=16-4m$, obținem $16-4m<0$	**3p**
	$m\in(4,+\infty)$	**2p**
3.	$1+\log_2(x-2)=\log_2 x$, deci $\log_2\dfrac{x}{x-2}=1$, de unde obținem $\dfrac{x}{x-2}=2$	**3p**
	$x=4$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Numărul n din mulțimea A are exact doi multipli în mulțimea A dacă $2n\le 99<3n$, de unde obținem că numerele din mulțimea A care au exact doi multipli în mulțimea A sunt $34, 35, 36, ..., 49$, deci sunt 16 cazuri favorabile și $p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{16}{90}=\dfrac{8}{45}$	**3p**
5.	$P(0,1)$, unde P este mijlocul segmentului AM	**2p**
	Segmentele AM și BN au același mijloc, de unde obținem $N(-3,1)$	**3p**
6.	$A+B=\pi-C$, deci $\sin C+\cos C=1$	**2p**
	$\sin^2 C+2\sin C\cos C+\cos^2 C=1\Rightarrow\sin 2C=0$ și, cum $C\in(0,\pi)$, obținem $C=\dfrac{\pi}{2}$, deci triunghiul ABC este dreptunghic	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(1))=\begin{vmatrix}1&3&1\\2&1&-1\\1&3&1\end{vmatrix}=1\cdot1\cdot1+2\cdot3\cdot1+3\cdot(-1)\cdot1-1\cdot1\cdot1-(-1)\cdot3\cdot1-2\cdot3\cdot1=$	**3p**
	$=1+6-3-1+3-6=0$	**2p**
b)	$B(a)=\begin{pmatrix}0&0&a\\0&0&0\\a&0&0\end{pmatrix}$, $B(a)\cdot B(a)=\begin{pmatrix}a^2&0&0\\0&0&0\\0&0&a^2\end{pmatrix}$, pentru orice număr real a	**2p**
	$B(a)\cdot B(a)\cdot B(a)=\begin{pmatrix}0&0&a^3\\0&0&0\\a^3&0&0\end{pmatrix}=a^3\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}=a^3B(1)$, pentru orice număr real a	**3p**

c)	$\det\left(A(a)\right)=0$; cum $\det\left(A(a)\right)=-a^2+3a-2$, obținem $a=1$, pentru care sistemul este incompatibil, deci nu convine, sau $a=2$, pentru care sistemul are o infinitate de soluții	**2p**
	Dacă $a=2$, soluția sistemului este $\left(x_0,y_0,z_0\right)=\left(\alpha-1,-\alpha+1,\alpha\right)$ și, cum α este număr real, obținem $x_0y_0+y_0z_0+z_0x_0=(\alpha-1)(-\alpha+1)+\alpha(-\alpha+1)+\alpha(\alpha-1)=-(\alpha-1)^2\le 0$, pentru orice soluție $\left(x_0,y_0,z_0\right)$ a sistemului de ecuații, cu x_0, y_0 și z_0 numere reale	**3p**
2.a)	$(-1)*2=\dfrac{-1+2}{4\cdot\lvert-1\cdot 2\rvert+1}=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{4\cdot 2+1}=\dfrac{1}{9}$	**2p**
b)	$z*0=\dfrac{z+0}{4\cdot\lvert z\cdot 0\rvert+1}=z$, pentru orice număr complex z	**2p**
	$0*z=\dfrac{0+z}{4\cdot\lvert 0\cdot z\rvert+1}=z$, pentru orice număr complex z, deci $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**3p**
c)	$z*z=\dfrac{2z}{4\cdot\lvert z^2\rvert+1}$, pentru orice număr complex z	**2p**
	$\left\lvert\dfrac{2z}{4\cdot\lvert z\rvert^2+1}\right\rvert=\lvert z\rvert$ și z este număr complex nenul, deci $4\cdot\lvert z\rvert^2+1=2$, de unde obținem $\lvert z\rvert=\dfrac{1}{2}$ și, de exemplu, numerele distincte nenule $\dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{1}{2}$ și $\dfrac{i}{2}$ verifică egalitatea dată	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{\dfrac{4x^3}{2\sqrt{x^4+16}}\cdot x-\sqrt{x^4+16}}{x^2}=\dfrac{2x^4-x^4-16}{x^2\sqrt{x^4+16}}=$	**3p**
	$=\dfrac{x^4-16}{x^2\sqrt{x^4+16}}=\dfrac{\left(x^2-4\right)\left(x^2+4\right)}{x^2\sqrt{x^4+16}}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+16}}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{16}{x^4}}=1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+16}-x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{16}{x\left(\sqrt{x^4+16}+x^2\right)}=0$, deci dreapta de ecuație $y=x$ este asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=2$; $f'(x)<0$, pentru orice $x\in(0,2)$ și $f'(x)>0$, pentru orice $x\in(2,+\infty)$	**2p**
	$g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)+f\left(\dfrac{4}{x}\right)=2f(x)$, deci g este strict descrescătoare pe $(0,2)$ și g este strict crescătoare pe $(2,+\infty)$ și, cum g este continuă, $g(2)=4\sqrt{2}$, $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=+\infty$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$, obținem că ecuația $g(x)=m$ are exact două soluții pentru $m\in\left(4\sqrt{2},+\infty\right)$	**3p**

2.a)	$\int_0^3 e^x f(x)dx = \int_0^3 (x^2+1)dx = \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Big\|_0^3 =$	**3p**
	$=\frac{27}{3}+3=12$	**2p**
b)	G este primitivă a funcției $g \Rightarrow G'(x)=g(x)$, deci $G''(x)=g'(x)=$	**2p**
	$=\frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2} \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci funcția G este convexă	**3p**
c)	$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{e^x f(x)}}dx = \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_0^1 \frac{x^3+x-x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2+1)' \cdot \left(\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx =$ $=\frac{1}{2}\left(\frac{2(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}{3}-2\sqrt{x^2+1}\right)\Big\|_0^1 = \frac{2-\sqrt{2}}{3}$	**3p**
	$\frac{2-\sqrt{2}}{3}=\frac{a-\sqrt{2}}{3}$, de unde obținem $a=2$	**2p**