Examenul național de bacalaureat 2022

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați termenul b_4 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\ge1}$, știind că $b_1=\sqrt{2}$ și $b_2=4$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx^2-2x+1$, unde m este număr real nenul. Determinați numărul real nenul m pentru care axa Ox este tangentă graficului funcției f.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x+2}-3^x-6\cdot3^{x-1}=6$.

5p **4.** Se consideră mulțimea A, a numerelor naturale de două cifre. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea A, numărul $2n-60$ să aparțină mulțimii A.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,4)$, $B(5,2)$ și C, mijlocul segmentului AB. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul C și este perpendiculară pe dreapta AB.

5p **6.** Se consideră triunghiul isoscel ABC, cu măsura unghiului A egală cu $120°$ și $AB=6$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu $9\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ și $B(x)=xI_2+iA$, unde x este număr real și $i^2=-1$.

5p **a)** Arătați că $\det A=1$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $B(3)\cdot B(5)=8B(x)$.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere întregi pentru care matricea $B(m)+iB(n)$ **nu** este inversabilă.

2. Pe mulțimea $M=[1,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=xy-\sqrt{(x-1)(y-1)}$.

5p **a)** Arătați că $2*5=8$.

5p **b)** Arătați că $e=1$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Demonstrați că $(nx)*y\ge x(n*y)$, pentru orice $x,y\in M$ și orice număr natural n, $n\ge2$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{4\sqrt{x}}{x^2+3}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{6(1-x^2)}{\sqrt{x}(x^2+3)^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați $a\in(0,+\infty)$, știind că tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a,f(a))$ este paralelă cu axa Ox.

5p **c)** Demonstrați că $\dfrac{\sqrt{x}}{x^2+3}>\dfrac{\sqrt{x+\frac{1}{x}}}{x^2+\frac{1}{x^2}+5}$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x+2x}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 e^x f(x)\,dx=e$.

5p **b)** Arătați că $\int_{-1}^0 f(x)\,dx=-1$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\int_0^1 F(x)f''(x)dx=\dfrac{a(e+1)}{e^2}$, unde $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este primitiva funcției f cu proprietatea $F(0)=0$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$q=\frac{b_2}{b_1}=2\sqrt{2}$, unde q este rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$	**2p**
	$b_4=b_1q^3=\sqrt{2}\cdot\left(2\sqrt{2}\right)^3=32$	**3p**
2.	Axa Ox este tangentă graficului funcției $f \Leftrightarrow \Delta=0 \Leftrightarrow 4-4m=0$	**3p**
	$m=1$	**2p**
3.	$3^{x-1}\left(3^3-3-6\right)=6 \Leftrightarrow 3^{x-1}\cdot 18=6 \Leftrightarrow 3^{x-1}=\frac{1}{3}$	**3p**
	$x-1=-1$, deci $x=0$	**2p**
4.	Mulțimea A are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Numărul $2n-60$ aparține mulțimii A dacă $10\leq 2n-60\leq 99$, deci sunt 45 de cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{45}{90}=\frac{1}{2}$	**3p**
5.	$m_{AB}=-\frac{1}{3}$ și, cum $d\perp AB$, obținem $m_d=3$	**2p**
	$C(2,3)$ și, cum $C\in d$, obținem că ecuația dreptei d este $y-3=3(x-2)$, adică $y=3x-3$	**3p**
6.	$AC=AB=6$	**2p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC\cdot\sin 120^\circ}{2}=\frac{6\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=9\sqrt{3}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=0\cdot 0-1\cdot(-1)=$	**3p**
	$=0+1=1$	**2p**
b)	$B(3)\cdot B(5)=(3I_2+iA)(5I_2+iA)=15I_2+8iA+i^2A\cdot A=16I_2+8iA=$	**3p**
	$=8(2I_2+iA)=8B(2)$, deci $x=2$	**2p**
c)	$B(m)+iB(n)=\begin{pmatrix}m+in & i-1\\ -i+1 & m+in\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(B(m)+iB(n)\right)=(m+in)^2-2i$, unde $m,n\in\mathbb{Z}$	**2p**
	$B(m)+iB(n)$ nu este inversabilă, deci $\det\left(B(m)+iB(n)\right)=0\Rightarrow m^2-n^2+2(mn-1)i=0$ și, cum m și n sunt numere întregi, obținem perechile $(-1,-1)$ și $(1,1)$	**3p**
2.a)	$2*5=2\cdot 5-\sqrt{(2-1)(5-1)}=$	**3p**
	$=10-\sqrt{4}=8$	**2p**

b)	$x*1=x\cdot 1-\sqrt{(x-1)(1-1)}=x$, pentru orice $x\in M$	**2p**
	$1*x=1\cdot x-\sqrt{(1-1)(x-1)}=x$, pentru orice $x\in M$, deci $e=1$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**3p**
c)	$((nx)*y)-x(n*y)=x\sqrt{(n-1)(y-1)}-\sqrt{(nx-1)(y-1)}=\sqrt{y-1}\cdot\dfrac{(x-1)(nx-x-1)}{x\sqrt{n-1}+\sqrt{nx-1}}$, pentru $x,y\in M$ și $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$	**2p**
	Cum $nx-x-1=x(n-1)-1$ și $x\geq 1$, n este număr natural, $n\geq 2$, obținem $nx-x-1\geq 0$, deci $(nx)*y\geq x(n*y)$, pentru orice $x,y\in M$ și orice număr natural n, $n\geq 2$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{\frac{2}{\sqrt{x}}\cdot(x^2+3)-4\sqrt{x}\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{2x^2+6-8x^2}{\sqrt{x}(x^2+3)^2}=\dfrac{6(1-x^2)}{\sqrt{x}(x^2+3)^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a,f(a))$ este paralelă cu axa $Ox \Leftrightarrow f'(a)=0$, deci $1-a^2=0$	**3p**
	Cum $a\in(0,+\infty)$, obținem $a=1$	**2p**
c)	$f'(x)<0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(1,+\infty)$	**2p**
	$1<x<x+\dfrac{1}{x}\Rightarrow f(x)>f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$, deci $\dfrac{\sqrt{x}}{x^2+3}>\dfrac{\sqrt{x+\frac{1}{x}}}{x^2+\frac{1}{x^2}+5}$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_0^1 e^x f(x)\,dx=\int_0^1 (e^x+2x)\,dx=(e^x+x^2)\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=e+1-1=e$	**2p**
b)	$\int_{-1}^0 f(x)\,dx=\int_{-1}^0 (1+2xe^{-x})\,dx=(x-2(x+1)e^{-x})\Big\|_{-1}^0=$	**3p**
	$=-2-(-1)=-1$	**2p**
c)	$F'(x)=f(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, deci $\int_0^1 F(x)f''(x)dx=F(x)f'(x)\Big\|_0^1-\dfrac{f^2(x)}{2}\Big\|_0^1=$ $=F(1)f'(1)-F(0)f'(0)-\dfrac{f^2(1)-f^2(0)}{2}$	**3p**
	$f'(x)=2(1-x)e^{-x}$, deci $f'(1)=0$ și, cum $F(0)=0$, obținem $\int_0^1 F(x)f''(x)dx=\dfrac{-2(e+1)}{e^2}$, deci $a=-2$	**2p**