

Examenul național de bacalaureat 2022

Proba E. c)

Matematică $M_{tehnologic}$

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Calculați termenul a_1 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, știind că $a_3 = 6$ și $a_4 = 9$.
- 5p** 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x - 3$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x - 3$. Determinați numerele reale a pentru care $f(a) = g(a)$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x+3) = 2$.
- 5p** 4. În urma unei scumpiri cu 30%, prețul unui produs a crescut cu 60 de lei. Determinați prețul produsului după scumpire.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-4,1)$, $B(2,3)$ și dreapta d de ecuație $y = 2x + a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a , știind că mijlocul segmentului AB aparține dreptei d .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC , cu $AB = AC$, $BC = 12$ și măsura unghiului B egală cu 45° . Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu 36.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & x \\ 1 & 2x+1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(0)) = 0$.
- 5p** b) Determinați numărul real a pentru care $2A(4) + A(-2) = aA(2)$.
- 5p** c) Arătați că, dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $X \cdot A(1) = A(m)$, unde m este număr întreg, atunci matricea X are toate elementele numere întregi.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = (x+y)(x-1)(y-1) + 1$.
- 5p** a) Arătați că $2 * 1 = 1$.
- 5p** b) Arătați că legea de compoziție „ $*$ ” este comutativă.
- 5p** c) Determinați numerele naturale n pentru care $n * (1-n) \geq n^2$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+3}{x^2} + \ln x$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x^3}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 1$, situat pe graficul funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că $\ln \frac{x}{3} \geq \frac{2}{3} - \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{e^x}{2} + 1$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^2 \left(f(x) - \frac{e^x}{2} \right) dx = 4$.

5p b) Arătați că $\int_0^1 2x(f(x)-1)dx = \frac{5}{3}$.

5p c) Determinați numărul real a pentru care $\int_{-1}^0 (f(x)-x) \cdot f(x)dx = \frac{(3e+1)(3e+a)}{8e^2}$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică $M_{tehnologic}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$r = a_4 - a_3 = 3$, unde r este rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$ $a_3 = a_1 + 2r \Rightarrow a_1 = 6 - 2 \cdot 3 = 0$	2p 3p
2.	$f(a) = g(a) \Leftrightarrow a^2 + 2a - 3 = a - 3 \Leftrightarrow a^2 + a = 0$ $a = -1$ sau $a = 0$	3p 2p
3.	$x + 3 = 3^2 \Leftrightarrow x + 3 = 9$ $x = 6$, care convine	3p 2p
4.	$\frac{30}{100} \cdot x = 60$, unde x este prețul înainte de scumpire, deci $x = 200$ de lei După scumpire, prețul produsului este $200 + 60 = 260$ de lei	3p 2p
5.	$M(-1, 2)$, unde M este mijlocul segmentului AB $2 = 2 \cdot (-1) + a$, de unde obținem $a = 4$	2p 3p
6.	Triunghiul ABC este dreptunghic isoscel, de unde obținem $AB = AC = 6\sqrt{2}$ $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{6\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2}}{2} = 36$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 0 \cdot 1 - 0 \cdot 1 = 0$	3p 2p
b)	$2A(4) + A(-2) = 2 \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 3 & 15 \end{pmatrix} =$ $= 3 \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = 3A(2)$, de unde obținem $a = 3$	3p 2p
c)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = 2$ și $(A(1))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $A(m) = \begin{pmatrix} m & m \\ 1 & 2m+1 \end{pmatrix}$ și, cum $X = A(m) \cdot (A(1))^{-1}$, obținem $X = \begin{pmatrix} m & 0 \\ -m+1 & m \end{pmatrix}$, unde m este număr întreg, deci matricea X are toate elementele numere întregi	2p 3p
2.a)	$2 * 1 = (2+1)(2-1)(1-1) + 1 =$ $= 3 \cdot 1 \cdot 0 + 1 = 1$	3p 2p

b)	$x * y = (x + y)(x - 1)(y - 1) + 1 =$ $= (y + x)(y - 1)(x - 1) + 1 = y * x$, pentru orice numere reale x și y , deci legea de compoziție „ $*$ ” este comutativă	2p 3p
c)	$n * (1 - n) = -n^2 + n + 1$, pentru orice număr natural n $-n^2 + n + 1 \geq n^2 \Leftrightarrow 2n^2 - n - 1 \leq 0$ și, cum n este număr natural, obținem $n = 0$ sau $n = 1$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{x^2 - (x+3) \cdot 2x}{x^4} + \frac{1}{x} =$ $= \frac{-x-6}{x^3} + \frac{1}{x} = \frac{x^2 - x - 6}{x^3}$, $x \in (0, +\infty)$	3p 2p
b)	$f(1) = 4$, $f'(1) = -6$ Ecuația tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$, adică $y = -6x + 10$	2p 3p
c)	$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 3$; $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (0, 3] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0, 3]$, $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [3, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[3, +\infty)$, deci $f(x) \geq f(3)$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$ $\frac{x+3}{x^2} + \ln x \geq \frac{2}{3} + \ln 3 \Rightarrow \ln \frac{x}{3} \geq \frac{2}{3} - \frac{x+3}{x^2} \Rightarrow \ln \frac{x}{3} \geq \frac{2}{3} - \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$	3p 2p
2.a)	$\int_0^2 \left(f(x) - \frac{e^x}{2} \right) dx = \int_0^2 (x+1) dx = \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big _0^2 =$ $= \frac{2^2}{2} + 2 = 4$	3p 2p
b)	$\int_0^1 2x(f(x) - 1) dx = \int_0^1 (2x^2 + xe^x) dx = \frac{2x^3}{3} \Big _0^1 + (x-1)e^x \Big _0^1 =$ $= \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$	3p 2p
c)	Cum $f'(x) = 1 + \frac{e^x}{2} = f(x) - x$, $x \in \mathbb{R}$, obținem $\int_{-1}^0 (f(x) - x) \cdot f(x) dx = \int_{-1}^0 f'(x) \cdot f(x) dx =$ $= \frac{f^2(x)}{2} \Big _{-1}^0 = \frac{9e^2 - 1}{8e^2}$ $\frac{9e^2 - 1}{8e^2} = \frac{(3e+1)(3e+a)}{8e^2}$, de unde obținem $a = -1$	3p 2p