Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa finală, Neptun – Mangalia, 13 aprilie 2009

CLASA a VII-a

Problema 1. Considerăm triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ cu $AB = A_1B_1$, $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1 = 60^\circ$ şi $\angle ABC + \angle A_1B_1C_1 = 180^\circ$. Să se arate că

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{A_1C_1}.$$

Problema 2. Un pătrat de latură 5 se împarte în 25 de pătrate de latură 1. În fiecare pătrat unitate se scrie câte un număr real strict pozitiv şi mai mic decât 1, astfel încât:

- suma numerelor de pe fiecare linie este un număr natural;
- suma numerelor de pe fiecare coloană este un număr natural;
- suma celor 25 de numere este egală cu 11.

a) Să se arate că cel puţin unul dintre cele 25 de numere este mai mare sau egal decât $\frac{3}{5}$.

b) Dacă un singur număr dintre cele 25 de numere este mai mare decât $\frac{3}{5}$, să se arate că sumele numerelor de pe linia şi coloana ce îl conţin sunt egale.

Problema 3. a) Fie m, n numere naturale nenule, $m > 1$. Să se arate că numărul $m^4 + 4n^4$ nu este prim.

b) Să se arate că numărul $3^{4^5} + 4^{5^6}$ se descompune în produs de doi factori numere naturale, fiecare mai mare decât 10^{2009}.

Problema 4. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic şi fie D un punct în interiorul triunghiului astfel încât $\angle ADB - \angle ACB = 90^\circ$ şi $AC \cdot BD = AD \cdot BC$.

a) Să se calculeze suma măsurilor unghiurilor $\angle DAC$ şi $\angle DBC$.

b) Să se calculeze $\dfrac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}$.

Timp de lucru 3 ore + 1/2 oră pentru întrebări lămuritoare asupra enunţurilor

Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Societatea de Ştiinţe Matematice din România
Inspectoratul Şcolar Judeţean Constanţa

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa finală, Neptun – Mangalia, 13 aprilie 2009

CLASA a VIII-a

Problema 1. Să se determine numerele naturale n ce satisfac simultan proprietăţile:

a) câtul împărţirii lui n la 9 este un număr natural de trei cifre, toate cele trei cifre fiind egale;

b) câtul împărţirii lui $n + 36$ la 4 este un număr natural de patru cifre, cifrele fiind 2, 0, 0, 9, nu neapărat în această ordine.

Problema 2. De o parte şi de alta a planului triunghiului ABC se consideră punctele S şi P astfel încât $SA = SB = SC$ şi $PA \perp PB \perp PC \perp PA$. Ştiind că volumul piramidei $PABC$ este egal cu dublul volumului piramidei $SABC$, să se arate că dreapta SP trece prin centrul de greutate al triunghiului ABC.

Problema 3. Pentru numerele reale a, b, c notăm $x = |a| + |b| + |c|$ şi $y = |a - 2| + |b - 2| + |c - 2|$.

a) Să se arate că $x + y \geq 6$.

b) Ştiind că a, b, $c \in [-1, 3]$ şi că media aritmetică a numerelor a, b, c este 1, să se arate că $x + y \leq 10$.

Problema 4. Prin plane paralele la feţele sale, un cub se împarte în 27 de paralelipipede dreptunghice, dintre care exact două sunt cuburi. Să se arate că cele două cuburi au muchii de lungimi egale.

Timp de lucru 3 ore + 1/2 oră pentru întrebări lămuritoare asupra enunţurilor
Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Societatea de Ştiinţe Matematice din România
Inspectoratul Şcolar Judeţean Constanţa

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Finală, Neptun - *Mangalia, 13 Aprilie 2009*

CLASA a IX-a

Problema 1. Fie ABC un triunghi oarecare şi k un număr real nenul. Pe laturile AB şi AC ale triunghiului considerăm punctele variabile M, respectiv N, astfel încât

$$\frac{MB}{MA} - \frac{NC}{NA} = k.$$

Arătaţi că dreapta MN trece printr-un punct fix.

Problema 2. Fiind date numerele reale $a, b, c, d > 0$ şi $e, f, g, h < 0$, demonstraţi că inegalităţile $ae+bc > 0$, $ef+cg > 0$, $fd+gh > 0$, $da+hb > 0$, nu pot fi simultan îndeplinite.

Problema 3. Fiind date numerele reale pozitive distincte $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, şi o rearanjare $b_1, b_2, \ldots, b_n$ a lor, demonstraţi inegalitatea

$$(a_1^2 + b_1)(a_2^2 + b_2) \cdots (a_n^2 + b_n) \geq (a_1^2 + a_1)(a_2^2 + a_2) \cdots (a_n^2 + a_n).$$

Problema 4. Fiind date secvenţele ordonate de numere reale distincte $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ şi $b_1 < b_2 < \cdots < b_m$, $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq 2$, considerăm mulţimea

$$\{a_i + b_j \,;\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m\}.$$

Demonstraţi că această mulţime are exact $n+m-1$ elemente dacă şi numai dacă ambele secvenţe sunt în progresie aritmetică de aceeaşi raţie.

Timp de lucru 3 ore + 1/2 oră pentru întrebări lămuritoare asupra enunţurilor.
Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte.

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Societatea de Ştiinţe Matematice din România
Inspectoratul Şcolar al Judeţului Constanţa

A 60-a Olimpiadă Naţională de Matematică
Neptun – Mangalia – 13 aprilie 2009

CLASA a X-a

Problema 1. a) Arătaţi că, dacă $x, y \in (1, \infty)$ şi $x^y = y^x$, atunci $x = y$ sau există $m \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ astfel încât $x = m^{\frac{1}{m-1}}$, $y = m^{\frac{m}{m-1}}$.

b) Rezolvaţi în mulţimea $(1, \infty)$ ecuaţia cu două necunoscute

$$x^y + x^{x^{y-1}} = y^x + y^{y^{x-1}}.$$

Problema 2. Fie $a \in [2 + \sqrt{2}, 4]$. Determinaţi minimul expresiei $|z^2 - az + a|$, când $z \in \mathbb{C}$ şi $|z| \leq 1$.

Problema 3. Determinaţi toate funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică relaţia

$$f(x^3 + y^3) = xf(x^2) + yf(y^2), \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Problema 4. Vom spune că un număr natural $n \geq 4$ este *neobişnuit* dacă se poate aşeza câte un număr real în fiecare din cele n^2 pătrate unitate ale unui pătrat $\mathcal{P}$ de latură n, astfel încât suma celor 9 numere din orice pătrat 3×3 conţinut de $\mathcal{P}$ să fie strict negativă, iar suma celor 16 numere din orice pătrat 4×4 conţinut de $\mathcal{P}$ să fie strict pozitivă.

Determinaţi toate numerele neobişnuite.

Timp de lucru 3 ore + 1/2 oră pentru întrebări lămuritoare asupra enunţurilor
Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Societatea de Ştiinţe Matematice din România
Inspectoratul Şcolar Judeţean Constanţa

A 60-a Olimpiadă Naţională de Matematică
Neptun – Mangalia – 13 aprilie 2009

CLASA a XI-a

Problema 1. Fie $(t_n)_n$ un şir convergent de numere reale, $t_n \in (0,1)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} t_n \in (0,1)$. Definim şirurile $(x_n)_n$ şi $(y_n)_n$ prin relaţiile

$$x_{n+1} = t_n x_n + (1 - t_n)y_n,\ y_{n+1} = (1 - t_n)x_n + t_n y_n,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi x_0, y_0 numere reale fixate.

a) Să se arate că şirurile $(x_n)_n$ şi $(y_n)_n$ sunt convergente şi au aceeaşi limită.

b) Arătaţi că dacă $\lim\limits_{n\to\infty} t_n \in \{0,1\}$ concluzia nu mai este adevărată.

Problema 2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea că pentru orice $x \in \mathbb{R}$, limita

$$\lim_{h\to 0} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right|$$

există şi este finită.

Arătaţi că în orice punct din $\mathbb{R}$ funcţia f este derivabilă sau admite derivate laterale finite, de acelaşi modul şi semn contrar.

Problema 3. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, cu $AB = BA$ şi $\det B \neq 0$.

a) Arătaţi că dacă $|\det(A + zB)| = 1$ pentru orice $z \in \mathbb{C}$ cu $|z| = 1$, atunci $A^n = 0_n$.

b) Rămâne adevărată concluzia dacă eliminăm condiţia $AB = BA$?

Problema 4. Fie funcţiile $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde f este derivabilă, g şi h sunt monotone, iar $f' = f + g + h$.

Demonstraţi că mulţimea punctelor de discontinuitate ale funcţiei g coincide cu mulţimea punctelor de discontinuitate ale funcţiei h.

Timp de lucru 3 ore + 1/2 oră pentru întrebări lămuritoare asupra enunţurilor
Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Societatea de Ştiinţe Matematice din România
Inspectoratul Şcolar Judeţean Constanţa

A 60-a Olimpiadă Naţională de Matematică
Mangalia – Neptun – 13 aprilie 2009

CLASA a XII-a

Problema 1. Fie funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ derivabilă cu derivata continuă astfel încât

$$\int_0^1 (f'(x))^2 \mathrm{d}x \leq 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

Să se determine f ştiind că $f(1) = -\frac{1}{6}$.

Problema 2. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel comutativ finit. Notăm cu d numărul divizorilor lui zero, iar cu n numărul elementelor nilpotente ale inelului. Să se arate că:

a) dacă x şi y sunt nilpotente, atunci $x + y$ şi $x \cdot y$ sunt nilpotente.

b) n divide d.

(Un element $x \in A$ se numeşte divizor al lui zero dacă există $a \in A, a \neq 0$ astfel încât $x \cdot a = 0$. Un element $y \in A$ se numeşte nilpotent dacă există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $y^k = 0$).

Problema 3. Să se determine numerele naturale $n \geq 2$ cu proprietatea că în inelul $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ exact un element nu se poate scrie ca sumă de două pătrate.

Problema 4. Să se determine toate funcţiile $f : [0,1] \to [0,1]$ continue şi bijective cu proprietatea că

$$\int_0^1 g(f(x))\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x,$$

pentru orice funcţie continuă $g : [0,1] \to \mathbb{R}$.

Timp de lucru 3 ore+ 1/2 oră pentru întrebări lămuritoare asupra enunţurilor
Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte