Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Societatea de Ştiinţe Matematice din Romania

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa finală, Neptun – Mangalia, 13 aprilie 2009

CLASA A VII-a, SOLUŢII ŞI BAREMURI

Problema 1. Considerăm triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ cu $AB = A_1B_1$, $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1 = 60°$ şi $\angle ABC + \angle A_1B_1C_1 = 180°$. Să se arate că

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{A_1C_1}.$$

Soluţie Alipim cele două triunghiuri astfel încât laturile egale să coincidă ($A = A_1$ şi $B = B_1$) iar dreapta AB să despartă punctele C şi C_1.
....**2 puncte**
Deoarece $\angle ABC + \angle A_1B_1C_1 = 180°$, punctele B, C şi C_1 sunt coliniare.
....**1 punct**
Fie $D \in (CA_1$ astfel încât $C_1D \parallel AB$. Din teorema fundamentală a asemănării avem

$$\frac{DC_1}{AB} = \frac{CD}{CA}.$$

....**2 puncte**
Triunghiul ADC_1 este echilateral, deoarece $\angle DAC_1 = \angle AC_1D = 60°$.
....**1 puncte**
Atunci $\dfrac{AC_1}{AB} = \dfrac{AC + AC_1}{AC}$, de unde

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{A_1C_1}.$$

....**1 punct**

Problema 2. Un pătrat de latură 5 se împarte în 25 de pătrate de latură 1. În fiecare pătrat unitate se scrie câte un număr strict pozitiv şi mai mic decât 1, astfel încât:
- suma numerelor de pe fiecare linie este un număr natural;
- suma numerelor de pe fiecare coloană este un număr natural;
- suma celor 25 de numere este egală cu 11.

a) Să se arate că cel puţin unul dintre cele 25 de numere este mai mare sau egal decât $\frac{3}{5}$.

b) Dacă un singur număr dintre cele 25 de numere este mai mare decât $\frac{3}{5}$, să se arate că sumele numerelor de pe linia şi coloana ce îl conţin sunt egale.

Soluţie. a) Presupunem că toate numerele sunt mai mici strict decât $\frac{3}{5}$. Atunci suma numerelor pe fiecare linie este strict mai mică decât $5 \cdot \frac{3}{5} = 3$, deci cel mult egală cu 2.

....**2 puncte**

De aici rezultă că suma tuturor numerelor este mai mică decât $5 \cdot 2 = 10$, contradicţie.

....**1 punct**

b) Suma numerelor de pe linia, respectiv coloana ce conţine numărul maxim este mai mică decât $4 \cdot 0,6 + 1 = 3,4$, deci cel mult egală cu 3.

....**2 puncte**

Pe celelalte 4 linii şi pe celelalte 4 coloane suma este maxim 2, iar $11 > 2 \cdot 5$, deci există o linie şi o coloană cu suma numerelor măcar 3, anume chiar cele ce conţin numărul maxim.

....**2 puncte**

Problema 3. a) Fie m, n numere naturale nenule, $m > 1$. Să se arate că numărul $m^4 + 4n^4$ nu este prim.

b) Să se arate că numărul $3^{4^5} + 4^{5^6}$ se descompune în produs de doi factori, fiecare mai mare decât 10^{2009}.

Soluţie. a) Avem

$$m^4 + 4n^4 = m^4 + 4n^4 + 4m^2n^2 - 4m^2n^2 = (m^2 + 2n^2)^2 - (2mn)^2$$

....**1 punct**

$= (m^2 + 2n^2 + 2mn)(m^2 + 2n^2 - 2mn)$

....**1 punct**

Cum $m^2 + 2n^2 + 2mn > m^2 + 2n^2 - 2mn = n^2 + (m - n)^2 > 1$, rezultă cerinţa

....**1 punct**

b) Pentru $m = 3^{4^4}$ şi $n = 4^{\frac{5^6-1}{4}} = 4^{3906}$ avem descompunerea

$$3^{4^5} + 4^{5^6} = [(3^{256} - 4^{3906})^2 + (4^{3906})^2][(3^{256} + 4^{3906})^2 + (4^{3906})^2].$$

....**2 puncte**

Cum $4^{3906} > 4^{3900} = 1024^{780} > 1000^{780} = 10^{2340}$, rezultă că $(4^{3906})^2 > 10^{2009}$, deci ambii factori ai descompunerii sunt mai mari decât 10^{2009}.

....**2 puncte**

Problema 4. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic şi fie D un punct în interiorul triunghiului astfel încât $\angle ADB - \angle ACB = 90°$ şi $AC \cdot BD = AD \cdot BC$.

a) Să se calculeze suma măsurilor unghiurilor $\angle DAC$ şi $\angle DBC$.

b) Să se calculeze $\dfrac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}$.

Soluţie. a) Avem

$$\angle DAC + \angle DBC = 180° - \angle ADC - \angle ACD + 180° - \angle BDC - \angle BCD =$$

.... **1 punct**

$= [360° - (\angle ADC + \angle BDC)] - \angle ACB = \angle ADB - \angle ACB = 90°$.

.... **2 puncte**

b) Considerăm punctul E în interiorul unghiului $\angle ADB$ cu proprietatea că $DE = BD$ şi $\angle BDE = 90°$. Atunci $\angle ADE = \angle ACB$.

Din ipoteză avem $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AD}{BD}$, ceea ce se scrie $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AD}{DE}$. De aici rezultă asemănarea triunghiurilor ACB şi ADE.

.... **2 puncte**

Obţinem $\angle EAD = \angle BAC$ şi $\dfrac{AC}{AD} = \dfrac{AB}{AE}$, ceea ce implică asemănarea triunghiurilor ABE şi ACD.

.... **1 punct**

Urmează

$$\frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD} = \frac{BE}{CD} \cdot \frac{CD}{BD} = \frac{BE}{BD} = \frac{BD\sqrt{2}}{BD} = \sqrt{2}.$$

.... **1 punct**

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Societatea de Ştiinţe Matematice din Romania
Inspectoratul Şcolar Judeţean Constanţa

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa finală, Neptun – Mangalia, 13 aprilie 2009

CLASA a VIII-a, SOLUŢII ŞI BAREMURI

Problema 1. Să se determine numerele naturale n ce satisfac simultan proprietăţile:

a) câtul împărţirii lui n la 9 este un număr natural de trei cifre, toate cele trei cifre fiind egale;

b) câtul împărţirii lui $n + 36$ la 4 este un număr natural de patru cifre, cifrele fiind 2, 0, 0, 9, nu neapărat în această ordine.

Soluţie Avem $n = 9 \cdot 111 \cdot a + r$, unde $a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ şi $r < 9$ este număr natural,

.... **1 punct**

deci $n \leq 9 \cdot 999 + 8 = 8999$ şi apoi $\dfrac{n + 36}{4} < 2258$,

.... **1 punct**

ceea ce arată că $\left[\dfrac{n + 36}{4}\right] = 2009$ sau 2090.

.... **2 puncte**

Dacă $\left[\dfrac{n + 36}{4}\right] = 2009$, atunci $n + 36 = 4 \cdot 2009 + q$, unde $q \in \{0, 1, 2, 3\}$, deci $n \in \{8000, 8001, 8002, 8003\}$. Dintre acestea, doar 8000 convine, deoarece câtul împărţirii numerelor 8001, 8002, 8003 la 9 este 889.

.... **2 puncte**

Dacă $\left[\dfrac{n + 36}{4}\right] = 2090$, atunci $n + 36 = 4 \cdot 2090 + q$, unde $q \in \{0, 1, 2, 3\}$, deci $n \in \{8324, 8325, 8326, 8327\}$. Niciun un număr nu verifică prima cerinţă, deci $n = 8000$.

.... **1 punct**

Problema 2. De o parte şi de alta a planului triunghiului ABC se consideră punctele S şi P astfel încât $SA = SB = SC$ şi $PA \perp PB \perp PC \perp PA$. Ştiind că volumul piramidei $PABC$ este egal cu dublul volumului piramidei $SABC$, să se arate că dreapta SP trece prin centrul de greutate al triunghiului ABC.

Soluţie. Notăm cu O, respectiv H proiecţiile punctelor S şi P pe planul (ABC). Fie G punctul de intersecţie al dreptei SP cu planul triunghiului.

Din congruenţa triunghiurilor SOA, SOB, SOC rezultă că $OA = OB = OC$, deci O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

....**1 punct**

Deoarece $PA \perp (PBC)$ avem $PA \perp BC$; în plus $PH \perp BC$, rezultă $BC \perp (PAH)$, de unde $AH \perp BC$. Analog $BH \perp AC$, deci H este ortocentrul triunghiului ABC.

....**2 puncte**

Dacă $O = H$, atunci triunghiul ABC este echilateral, punctele G, H, O coincid şi cerinţa este demonstrată.

....**1 punct**

Dacă punctele O şi H sunt distincte, atunci G, H, O sunt coliniare, deoarece $SO \parallel PH$ şi $G \in SP$. Din condiţia asupra volumelor rezultă $2SO = PH$, iar din asemănarea triunghiurilor dreptunghice GOS şi GHP obţinem

$$\frac{OG}{GH} = \frac{1}{2}.$$

....**2 puncte**

Fie M mijlocul segmentului BC şi Γ centrul de greutate al triunghiului ABC. Atunci triunghiurile $AH\Gamma$ şi $OM\Gamma$ sunt asemenea, de unde $\frac{O\Gamma}{\Gamma H} = \frac{1}{2}$, adică $G = \Gamma$, ceea ce trebuia arătat.

....**1 punct**

Problema 3. Pentru numerele reale a, b, c notăm $x = |a| + |b| + |c|$ şi $y = |a-2| + |b-2| + |c-2|$.

a) Să se arate că $x + y \geq 6$.

b) Ştiind că a, b, $c \in [-1, 3]$ şi că media aritmetică a numerelor a, b, c este 1, să se arate că $x + y \leq 10$.

Soluţie. a) Din inegalitatea modulului avem $|t| + |t-2| \geq |t-(t-2)| = 2$ oricare ar fi numărul real t.

....**1 punct**

Atunci $|x| + |y| = (|a| + |a-2|) + (|b| + |b-2|) + (|c| + |c-2|) \geq 2+2+2 = 6$.

....**1 punct**

b) Fie $f(t) = |t| + |t-2|$. Observăm că pentru $t \in [0, 2]$ avem $f(t) = t + (2-t) = 2$,

....**1 punct**

pentru $t \in (2, 3]$ avem $f(t) = 2t - 2 \leq 4$, iar pentru $t \in [-1, 0)$ avem $f(t) = 2 - 2t \leq 4$.

....**1 punct**

Vom arăta că dacă a, b, $c \in [-1, 3]$ şi $a + b + c = 3$, atunci unul dintre cele trei numere este în intervalul $[0, 2]$. Fie $a \leq b \leq c$. Este evident că nu putem avea $a, b, c \in [-1, 0)$ sau $a, b, c \in (2, 3]$.

....**1 punct**

Dacă $a, b, c \notin [0, 2]$, rămân cazurile:

• $a, b \in [-1, 0)$ şi $c \in (2, 3]$

• $a \in [-1, 0)$ şi $b, c \in (2, 3]$.

În primul caz avem $a + b + c < 0 + 0 + 3 = 3$, fals, iar în al doilea caz avem $a + b + c > -1 + 2 + 2 = 3$, fals.

....**1 punct**

În concluzie, $|x| + |y| = f(a) + f(b) + f(c) \le 4 + 2 + 4 = 10$.

....**1 punct**

Problema 4. Prin plane paralele la feţele sale, un cub se împarte în 27 de paralelipipede dreptunghice, dintre care exact două sunt cuburi. Să se arate că cele două cuburi au muchii de lungimi egale.

Soluţie. Fie A un vârf al cubului. Muchiile din A sunt împărţite de planele paralele la feţe în câte trei segmente. Într-adevăr, în caz contrar s-ar folosi 26 de plane paralele la o faţă sau 8 plane paralele la o faţă şi 2 plane la o altă faţă. Ambele cazuri produc 27 de paralelipipede cu o dimesiune egală cu cea a cubului iniţial, deci niciun cub, fals.

....**1 punct**

Notăm cu x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3 şi z_1, z_2, z_3 lungimile segmentelor generate pe muchiile din A. Observăm că

$$x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3 = z_1 + z_2 + z_3, \tag{1}$$

sumele reprezentând lungimea muchiei cubului.

....**1 punct**

Dacă cele două cuburi au dimensiunile $a \neq b$, atunci $a = x_i = y_j = z_k$ şi $b = x_p = y_q = z_r$, cu $i \neq p$, $j \neq q$ şi $k \neq r$.

....**2 puncte**

Fie u cel de-al treilea număr din mulţimea $\{1, 2, 3\} \setminus \{i, p\}$, $v \in \{1, 2, 3\} \setminus \{j, q\}$ şi $t \in \{1, 2, 3\} \setminus \{k, r\}$. Relaţia (1) devine

$$a + b + x_u = a + b + y_v = a + b + z_t,$$

deci

$$x_u = y_v = z_t,$$

....**2 puncte**

ceea ce arată că printre cele 27 de paralelipipede mai există un al treilea, fals.

....**1 punct**

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Societatea de Ştiinţe Matematice din România
Inspectoratul Şcolar Judeţean Constanţa

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Finală, Neptun-Mangalia, 13 Aprilie 2009

CLASA a IX-a – SOLUŢII şi BAREMURI

Problema 1. Fie ABC un triunghi oarecare şi k un număr real nenul. Pe laturile AB şi AC ale triunghiului considerăm punctele variabile M, respectiv N, astfel încât

$$\frac{MB}{MA} - \frac{NC}{NA} = k.$$

Arătaţi că dreapta MN trece printr-un punct fix.

Soluţie. Fie d paralela prin A la dreapta BC şi P, respectiv Q, punctele de intersecţie a dreptei MN cu dreptele BC, respectiv d. În cele ce urmează, XY desemnează segmentul *orientat* de la X la Y. Conform teoremei lui Menelaus,

$$\frac{PC}{PB} = \frac{MA}{MB} \cdot \frac{NC}{NA}.$$

. . . . **2 puncte**

Ţinând cont de relaţia din enunţ şi de faptul că $PC = PB + BC$, din egalitatea de mai sus rezultă că

$$\frac{MA}{MB} \cdot PB = -\frac{1}{k} \cdot BC.$$

. . . . **3 puncte**

Din asemănarea triunghiurilor orientate MAQ şi MBP, obţinem

$$AQ = -\frac{MA}{MB} \cdot PB,$$

deci $AQ = (1/k)BC$. Prin urmare, punctul Q este fix.

. . . . **2 puncte**

Soluţie Alternativă. Fie $u = MB/MA$ şi $v = NC/NA$, segmentele fiind orientate conform convenţiei din soluţia precedentă; deci $u \neq 1$ şi $v \neq 1$.

În raport cu o origine oarecare a planului, vectorii de poziţie ai punctelor A, B, C sunt legaţi printr-o relaţie de forma $\mathbf{r}_B = x\,\mathbf{r}_A + y\,\mathbf{r}_C$, unde x şi y sunt nişte numere reale. Vectorii de poziţie ai punctelor M şi N sunt

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_M &= -\frac{u}{1-u}\,\mathbf{r}_A + \frac{1}{1-u}\,\mathbf{r}_B \\ &= \frac{x-u}{1-u}\,\mathbf{r}_A + \frac{y}{1-u}\,\mathbf{r}_C, \\ \mathbf{r}_N &= -\frac{v}{1-v}\,\mathbf{r}_A + \frac{1}{1-v}\,\mathbf{r}_C.\end{aligned}$$

....**3 puncte**

Dreapta MN trece printr-un punct fix dacă şi numai dacă există o origine a planului, nesituată pe dreapta AC, astfel încât vectorii $\mathbf{r}_M$ şi $\mathbf{r}_N$ să fie coliniari, oricare ar fi $u \neq 1$ şi oricare ar fi $v \neq 1$. Acest lucru este posibil dacă şi numai dacă există două numere reale x şi y, astfel încât $u - x = vy = (u-k)y$, oricare ar fi $u \neq 1$ şi oricare ar fi $v \neq 1$; adică, $u(1-y) = x - ky$, oricare ar fi $u \neq 1$, ceea ce impune $y = 1$ şi $x = k$. Prin urmare, dreapta MN trece printr-un punct fix O al planului.

....**4 puncte**

În raport cu această origine,

$$\mathbf{r}_B = k\,\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_C = k(\mathbf{r}_B + \mathbf{a}) + (\mathbf{r}_B + \mathbf{c}),$$

unde $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{c}$ sunt vectorii de poziţie ai punctelor A şi C în raport cu B. Obţinem $\mathbf{r}_B = -\mathbf{a} - (1/k)\mathbf{c}$. În raport cu B, vectorul de poziţie al punctului fix este deci $\mathbf{a} + (1/k)\mathbf{c}$.

Problema 2. Fiind date numerele reale $a, b, c, d > 0$ şi $e, f, g, h < 0$, demonstraţi că inegalităţile $ae+bc > 0$, $ef+cg > 0$, $fd+gh > 0$, $da+hb > 0$, nu pot fi simultan îndeplinite.

Soluţie. Inegalităţile se pot scrie $bc > a(-e)$, $(-e)(-f) > c(-g)$, $(-g)(-h) > (-f)d$, $da > (-h)b$, cu toţi factorii numere reale strict pozitive. Înmulţind membru cu membru aceste inegalităţi se obţine $bcefghda > aecgfdhb$, absurd, căci cei doi membri au aceeaşi valoare $abcdefgh$.

....**7 puncte**

Soluţie Alternativă. Punctele $A(a,b)$, $B(e,c)$, $C(f,g)$ şi $D(d,h)$ se află în cadranele I, II III, respectiv IV. Cel puţin unul dintre unghiurile $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$, $\angle DOA$ are măsura mai mare sau egală cu $90°$. Produsul scalar al vectorilor care formează acel unghi este deci mai mic sau egal cu zero, de unde concluzia.

....**7 puncte**

Problema 3. Fiind date numerele reale pozitive distincte $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, şi o rearanjare $b_1, b_2, \ldots, b_n$ a lor, demonstraţi inegalitatea

$$(a_1^2 + b_1)(a_2^2 + b_2)\cdots(a_n^2 + b_n) \geq (a_1^2 + a_1)(a_2^2 + a_2)\cdots(a_n^2 + a_n).$$

Soluţie. Dacă vreunul dintre a_i este zero, concluzia este evidentă. Fără a restrânge generalitatea, putem atunci presupune că $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.
.... **1 punct**

Dintre toate rearanjările $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ale numerelor $a_1, a_2, \ldots, a_n$, alegem una astfel încât produsul

$$(a_1^2 + x_1)(a_2^2 + x_2)\cdots(a_n^2 + x_n)$$

să aibă valoarea minimă.
.... **2 puncte**

Fie $c_1, c_2, \ldots, c_n$ o astfel de rearanjare şi $i < j$ doi indici oarecare. Produsul corespunzător rearanjării $c_1, \ldots, c_i, \ldots, c_j, \ldots, c_n$ este deci mai mic sau egal cu cel corespunzător rearanjării $c_1, \ldots, c_j, \ldots, c_i, \ldots, c_n$.
.... **2 puncte**

Rezultă că $(a_i^2+c_i)(a_j^2+c_j) \leq (a_i^2+c_j)(a_j^2+c_i)$, adică $(a_i^2-a_j^2)(c_j-c_i) \leq 0$, de unde deducem că $c_i < c_j$. Deci $c_k = a_k$, oricare ar fi indicele k, de unde inegalitatea din enunţ.
.... **2 puncte**

Soluţie Alternativă. Pornim de la inegalitatea $x^2+y \geq y(x+1)^2/(y+1)$, adevărată pentru x, y numere reale pozitive, fiind echivalentă cu $(x-y)^2 \geq 0$.
.... **5 puncte**

Înmulţind inegalităţile corespunzătoare perechilor (a_i, b_i), $1 \leq i \leq n$, obţinem inegalitatea din enunţ.
.... **2 puncte**

Problema 4. Fiind date secvenţele ordonate de numere reale distincte $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ şi $b_1 < b_2 < \cdots < b_m$, $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq 2$, considerăm mulţimea

$$\{a_i + b_j \ ; \ 1 \leq i \leq n, \ 1 \leq j \leq m\}.$$

Demonstraţi că această mulţime are exact $n + m - 1$ elemente dacă şi numai dacă ambele secvenţe sunt în progresie aritmetică de aceeaşi raţie.

Soluţie. Una dintre implicaţii este imediată, căci pentru raţia comună d rezultă $a_i = a_1+(i-1)d$ şi $b_j = b_1+(j-1)d$, deci $a_i+b_j = a_1+b_1+(i+j-2)d$, în total $n + m - 1$ valori distincte.
.... **1 punct**

Pentru implicaţia inversă, să remarcăm că $a_1 + b_1 < a_2 + b_1 < \cdots < a_n + b_1 < a_n + b_2 < \cdots < a_n + b_m$, deci mulţimea sumelor conţine întotdeauna cel puţin $n + m - 1$ valori.

.... **1 punct**

Vom proceda prin inducţie după $n + m$. Cazul $n = m = 2$ conduce la $a_1 + b_1 < a_1 + b_2, a_2 + b_2 < a_2 + b_2$, de unde $a_1 + b_2 = a_2 + b_2$, adică $a_2 - a_1 = b_2 - b_1$.

....**2 puncte**

Pentru $n + m > 4$, cel puţin una dintre valorile n, m (fie ea m) este mai mare decât 2. Atunci secvenţa obţinută prin eliminarea lui b_m conţine $m - 1$ elemente, şi se pierde cel puţin suma $a_n + b_m$, maximul care nu mai poate fi obţinut, deci rămân cel mult $n + m - 2$ valori posibile ale sumelor. Conform cu prima observaţie făcută, acesta este numărul minim posibil de valori, deci rămân exact $n + (m - 1) - 1$ valori. Din ipoteza de inducţie rezultă că secvenţele sunt în progresie aritmetică de aceeaşi raţie. În mod analog, prin eliminarea lui b_1 se pierde cel puţin suma $a_1 + b_1$ (minimul care nu mai poate fi obţinut), cu concluzie identică. Dar atunci secvenţele iniţiale sunt în progresie aritmetică de aceeaşi raţie.

....**3 puncte**

Minsterul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Societatea de Ştiinţe Matematice din România
Inspectoratul Şcolar al Judeţului Constanţa

A 60-a Olimpiadă Naţională de Matematică
Mangalia -Neptun – 13 aprilie 2009

CLASA a X-a – SOLUŢII ŞI BAREMURI DE CORECTARE

Problema 1. a) Arătaţi că, dacă $x, y \in (1, \infty)$ şi $x^y = y^x$, atunci $x = y$ sau există $m \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ astfel încât $x = m^{\frac{1}{m-1}}$, $y = m^{\frac{m}{m-1}}$.

b) Rezolvaţi în mulţimea $(1, \infty)$ ecuaţia cu două necunoscute

$$x^y + x^{x^{y-1}} = y^x + y^{y^{x-1}}.$$

Soluţie. a) Dacă $x = y$ avem soluţiile $x = m, y = m, m > 0$. . . . 1 punct

Dacă $x \neq y$ notăm $y = mx$. . . . . 1 punct

Înlocuind în egalitatea $y \cdot \lg x = x \cdot \lg y$ obţinem soluţiile $x = m^{\frac{1}{m-1}}$, $y = m^{\frac{m}{m-1}}$, $m \neq 1$. . . . . 2 puncte

b) Dacă $x^y > y^x$ rezultă că $(x^y)^{(x^y)} > (y^x)^{(y^x)}$. . . . . 1 punct

Ridicând la puterea $\frac{1}{xy}$, vom obţine că $x^{x^{y-1}} > y^{y^{x-1}}$, de unde $x^y + x^{x^{y-1}} > y^x + y^{y^{x-1}}$, fals. . . . . 3 puncte

Deci $x^y = y^x$. Soluţiile sunt cele indicate la punctul a).

Problema 2. Fie $a \in [2 + \sqrt{2}, 4]$. Determinaţi minimul expresiei $|z^2 - az + a|$, când $z \in \mathbb{C}$ şi $|z| \leq 1$.

Soluţie. Fie $z_1 = \overline{z_2} = \frac{a}{2} + \frac{i\sqrt{4a-a^2}}{2}$ rădăcinile ecuaţiei $z^2 - az + a = 0$.
. . . . 1*punct*

Avem $|z^2 - az + a| = |z - z_1||z - z_2| = MA \cdot MB$, unde M, A, B sunt punctele din plan corespunzătoare afixelor z, z_1, respectiv z_2. Fie T punctul de afix 1 şi M_1 intersecţia dintre AM şi cercul unitate dacă unghiul AM_1B este ascuţit (în caz contrar, M_1 va fi intersecţia dintre BM şi cercul unitate).
. . . . 2 puncte

Avem $MA \cdot MB \geq M_1A \cdot M_1B \geq TA \cdot TB = (TA)^2$, ... 2 puncte
deci

$$min|z^2 - az + a| = |z_1 - 1|^2 = \left(\frac{a}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4a - a^2}}{2}\right)^2 = 1.$$

. . . . 2 puncte

Observaţie: Să notăm cu A_1 şi B_1 punctele din plan corespunzătoare soluţiilor ecuaţiei $z^2 - az + a = 0$, $a = 2 + \sqrt{2}$. Măsura unghiului A_1TB_1 este de $90°$, ceea ce explică de ce unul din unghiurile AM_1B este întotdeauna ascuţit şi $AM_1 \cdot M_1B \geq AT \cdot TB$.

Problema 3. Determinaţi toate funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică relaţia

$$f(x^3 + y^3) = xf(x^2) + yf(y^2),\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Soluţie. Înlocuind $y = 0$ în relaţia dată şi înţelegând toate relaţiile următoare ca având loc pentru orice valoare reală a variabilelor, avem: $f(x^3) = xf(x^2)$ deci şi $f(x^3 + y^3) = f(x^3) + f(y^3)$ . . . . .2 puncte

adică $f(x + y) = f(x) + f(y)$. . . . . .1 punct

Observăm că dacă f verifică ecuaţia dată atunci, pentru orice constantă c reală, şi cf verifică relaţia. Putem presupune atunci că $f(1) = 1$ sau $f(1) = 0$.

Dacă $f(1) = 1$, atunci din $f((x+1)^3) = (x+1)f((x+1)^2))$ avem $2f(x^2) + f(x) = 2xf(x) + x$, iar cu substituţia $x \to x+1$ obţinem $2f((x+1)^2) + f(x+1) = (2x+2)f(x+1) + x+1$. Ultimele două relaţii duc la $f(x) = x$. Conform observaţiei avem $f(x) = c \cdot x$, $c \in \mathbb{R}^*$. . . . . 2 puncte

Dacă $f(1) = 0$, atunci $f((x + 1)^3) = (x + 1)f((x + 1)^2)$ adică $2f(x^2) + f(x) = 2xf(x)$. Analog cu cazul precedent avem $2f((x + 1)^2) + f(x + 1) = (2x + 2)f(x + 1)$ ceea ce implică $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. . . . . 2 puncte

În concluzie $f(x) = c \cdot x$, $c \in \mathbb{R}$.

Problema 4. Vom spune că un număr natural $n \geq 4$ este *neobişnuit* dacă se poate aşeza câte un număr real în fiecare din cele n^2 pătrate unitate ale unui pătrat $\mathcal{P}$ de latură n, astfel încât suma celor 9 numere din orice pătrat 3×3 conţinut de $\mathcal{P}$ să fie strict negativă, iar suma celor 16 numere din orice pătrat 4×4 conţinut de $\mathcal{P}$ să fie strict pozitivă.

Determinaţi toate numerele neobişnuite.

Soluţie. Vom arăta că numerele *neobişnuite* sunt $n = 4$ şi $n = 5$. Pentru $n \geq 6$ suma elementelor tuturor pătratelor 3×3 din pătratul mare este egală cu suma elementelor tuturor pătratelor 4×4 din acelaşi pătrat. . . 4 puncte

Pentru a exemplifica în acelaşi timp că $n = 4$ şi $n = 5$ sunt numere *neobişnuite* propunem cititorului următorul exemplu: un pătrat de dimensiune 5×5 în care coloana din mijloc conţine numai -5, celelalte elemente fiind 2. . . . . 3 puncte

Minsterul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Societatea de Ştiinţe Matematice din România
Inspectoratul Şcolar Judeţean Constanţa

A 60-a Olimpiadă Naţională de Matematică
Mangalia – 13 aprilie 2009

CLASA a XI-a – SOLUŢII ŞI BAREMURI DE CORECTARE

Problema 1. Fie $(t_n)_n$ un şir convergent de numere reale, $t_n \in (0,1)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} t_n \in (0,1)$. Definim şirurile $(x_n)_n$ şi $(y_n)_n$ prin relaţiile

$$x_{n+1} = t_n x_n + (1-t_n)y_n,\ y_{n+1} = (1-t_n)x_n + t_n y_n,$$

pentru orice şi $n \in \mathbb{N}$ şi x_0, y_0 numere reale fixate.

a) Să se arate că şirurile $(x_n)_n$ şi $(y_n)_n$ sunt convergente şi au aceeaşi limită.

b) Arătaţi că dacă $\lim\limits_{n\to\infty} t_n \in \{0,1\}$ concluzia nu mai este adevărată.

Soluţie şi barem. a) Fie I_n intervalul închis cu capetele x_n, y_n. Rezultă imediat că $\cdots \subset I_n \subset I_{n-1} \subset \cdots \subset I_1 \subset I_0$, incluziunile fiind stricte ...... 2 puncte

Notând cu l_n lungimea intervalului I_n, avem $l_n = |x_n - y_n|$ ...... 1 punct

Prin inducţie deducem $l_n = |(2t_0-1)(2t_1-1)\cdots(2t_n-1)||x_0-y_0|$ .... 1 punct

Dacă există n_0 cu $t_{n_0} = 1/2$ avem $l_n = 0$ pentru $n \geq n_0$. Altfel avem $\frac{l_{n+1}}{l_n} = |2t_{n+1}-1| \in (0,1)$ şi criteriul raportului ne dă $\lim l_n = 0$. Conform axiomei lui Cantor există unic $a_0 \in \cap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Cum x_n şi y_n sunt, pentru fiecare n simetrice faţă de mijlocul intervalului I_0, rezultă că $a_0 = \frac{x_0+y_0}{2}$ este limita comună a şirurilor $(x_n)_n$ şi $(y_n)_n$ .... 2 puncte

b) De exemplu se poate lua $t_n = \frac{1}{2(n+1)^2}$ .... 1 punct

Soluţie alternativă. Notăm $A_n = \begin{pmatrix} t_n & 1-t_n \\ 1-t_n & t_n \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi $Un = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

Se observă că $U_{n+1} = A_n U_n$ .... 2 puncte

şi $A_n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2t_n - 1 \end{pmatrix} P^{-1}$ .... 2 puncte deci $U_n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z_n \end{pmatrix} P^{-1} U_0$ unde $z_n = (2t_0 - 1) \cdots (2t_n - 1)$. Ca în soluţia precedentă se arată că $\lim z_n = 0$ de unde se deduce concluzia .... 2 puncte

Problema 2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea că pentru orice $x \in \mathbb{R}$, limita

$$\lim_{h \to 0} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right|$$

există şi este finită.

Arătaţi că în orice punct din $\mathbb{R}$ f este derivabilă sau admite derivate laterale finite, de acelaşi modul şi semn contrar..

Soluţie şi barem. Fie $l_x = \lim_{h \to 0} \left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right|$. Dacă $l_x = 0$ f este evident derivabilă în x şi derivata este zero. .... 1 punct

Dacă $l_x > 0$, să presupunem, de exemplu, că f nu este derivabilă la dreapta în x. Există atunci şiruri $(u_n)_n, (v_n)_n$, cu termeni pozitivi, convergente la 0, şi astfel ca

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x+u_n) - f(x)}{u_n} = -l_x \lim_{n \to \infty} \frac{f(x+v_n) - f(x)}{v_n} = l_x,$$

.... 2 puncte

prin urmare funcţia definită prin $\varphi(t) = \frac{f(x+t)-f(x)}{t}$ îşi schimba semnul de o infinitate de ori pe orice vecinătate la dreapta a lui x. .... 2 puncte

Din proprietatea valorii intermediare, φ este continuă, rezultă că există un şir $(h_n)_n$ cu termeni pozitivi, convergent la 0, cu $f(x+h_n) - f(x) = 0$, în contradicţie cu ipoteza.

Derivabilitatea la stânga se demonstreaza analog iar faptul că numerele derivate sunt opuse este evident. .... 2 puncte

Problema 3. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, cu $AB = BA$ şi $\det B \neq 0$.

a) Arătaţi că dacă $|\det(A + zB)| = 1$ pentru orice $z \in \mathbb{C}$ cu $|z| = 1$, atunci $A^n = 0_n$.

b) Rămâne adevarată concluzia dacă eliminăm condiţia $AB = BA$?

Soluţie şi barem. a) Funcţia $f(z) = \det(A + zB) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$ este polinomială de grad n ($a_n = \det B \neq 0$).

Condiţia $|\det(A + zB)| = 1$ pentru orice z, cu $|z| = 1$ se scrie $f(z) \cdot \overline{(f(z))} = 1$, pentru orice z cu $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$. .... 1 punct

Avem

$$(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n)(\overline{a}_0 + \overline{a}_1 \cdot \overline{z} + \overline{a}_2 \cdot \overline{z}^2 + \cdots + \overline{a}_n \cdot \overline{z}^n) = 1 \ \Leftrightarrow$$

$(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n)(\overline{a}_0 \cdot z^n + \overline{a}_1 \cdot z^{n-1} + \overline{a}_2 \cdot z^{n-2} + \cdots + \overline{a}_n) = z^n.$

Ultima egalitate având loc pentru o infinitate de valori ale lui z, ea este identitate de polinoame. Prin identificarea coeficienţilor obţinem succesiv:

$$a_0 \cdot \overline{a}_n = 0, a_1 \cdot \overline{a}_n = 0, a_2 \cdot \overline{a}_n = 0, \ldots, a_{n-1} \cdot \overline{a}_n = 0$$

deci $a_0 = a_1 = \cdots a_{n-1} = 0$ şi $a_n \cdot \overline{a}_n = 1$ (adică $|\det B| = 1$) ...... 2 puncte

În concluzie $f(z) = a_n \cdot z^n$ adică $\det(A + z \cdot B) = \det B \cdot z^n$ sau $\det[B(B^{-1} \cdot A + z \cdot I_n)] = \det B \cdot z^n$ adică $\det B \cdot \det(B^{-1} \cdot A + z \cdot I_n) = \det B \cdot z^n$, deci $\det(B^{-1} \cdot A + z \cdot I_n) = z^n$ cu $h(z) = z^n$care este polinomul caracteristic al matricei $C = -B^{-1} \cdot A$. Conform teoremei Cayley-Hamilton $(-B^{-1} \cdot A)^n = 0$ de unde $A^n = 0$ .... 2 puncte

b) Condiţia $A \cdot B = B \cdot A$ este necesară după cum se vede din următorul exemplu:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & \ddots & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

$\det(A + zB) = (-1)^{n+1} \cdot z^n$, deci $|\det(A + z \cdot B)| = 1$, dacă $|z| = 1$ şi evident $A^n = A \neq 0$. .... 2 puncte

Problema 4. Fie funcţiile $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde f este derivabilă, g şi h sunt monotone iar $f' = f + g + h$.

Demonstraţi că mulţimea punctelor de discontinuitate ale funţiei g coincide cu mulţimea punctelor de discontinuitate ale funcţiei h.

Soluţie şi barem. Prin înmulţire cu e^{-x} relaţia dată se scrie

$$(\mathrm{e}^{-x} f(x))' = \mathrm{e}^{-x} g(x) + \mathrm{e}^{-x} h(x).$$

.... 1 punct

Notăm cu g_1 respectiv h_1 funcţiile din membrul drept. Funcţiile g_1 şi h_1 au limite laterale în fiecare punct deci şi $u = g_1 + h_1$ .... 1 punct

Cum u are în plus proprietatea lui Darboux, fiind o derivată, rezultă că u este continuă pe $\mathbb{R}$. .... 3 puncte

Notând D_g mulţimea punctelor de discontinuitate ale funcţie g avem $D_g = D_{g_1}, D_h = D_{h_1}$. Dacă prin absurd $D_{g_1} \neq D_{h_1}$ pentru $x \in D_{g_1} \setminus D_{h_1}$ rezultă $x \in D_{g_1 + h_1}$, fals .... 2 puncte

Minsterul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Societatea de Ştiinţe Matematice din România
Inspectoratul Şcolar al Judeţului Constanţa

A 60-a Olimpiadă Naţională de Matematică
Mangalia – 13 aprilie 2009

CLASA a XII-a – SOLUŢII ŞI BAREMURI DE CORECTARE

Problema 1. Fie funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ derivabilă cu derivata continuă astfel încât

$$\int_0^1 (f'(x))^2 dx \leq 2\int_0^1 f(x)dx.$$

Să se determine f ştiind că $f(1) = -\frac{1}{6}$.

Soluţie şi barem: Avem

$$0 \leq \int_0^1 (f'(x)+x)^2 dx = \int_0^1 (f'(x))^2 dx + 2\int_0^1 xf'(x)dx + \frac{1}{3} =$$
$$= \int_0^1 (f'(x))^2 dx + 2xf(x)|_0^1 - 2\int_0^1 f(x)dx + \frac{1}{3} =$$
$$= \int_0^1 (f'(x))^2 dx - 2\int_0^1 f(x)dx \leq 0,$$

deci $\int_0^1 (f'(x)+x)^2 dx = 0$. .... **4 puncte**

Din continuitatea funcţiei f', rezultă că $f'(x) = -x$. Aşadar,

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} + a, \ \forall x \in [0,1].$$ **2 puncte**

Din condiţia $f(1) = -\frac{1}{6}$, obţinem $a = \frac{1}{3}$, deci $f(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}$. ...**1 punct**

Problema 2. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel comutativ finit. Notăm cu d numărul divizorilor lui zero, iar cu n numărul elementelor nilpotente ale inelului. Să se arate că:

1. dacă x şi y sunt nilpotente, atunci $x + y$ şi $x \cdot y$ sunt nilpotente.
2. n divide d.

(Un element $x \in A$ se numeşte divizor al lui zero dacă există $a \in A, a \neq 0$ astfel încât $x \cdot a = 0$. Un element $y \in A$ se numeşte nilpotent dacă există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $y^k = 0$).

Soluţie şi barem:

1. Din $x^k = y^l = 0$ rezultă $(x + y)^{k+l} = 0$ şi $(x \cdot y)^{k+l} = 0$, deci $x + y$ şi $x \cdot y$ sunt nilpotente. .... **2 puncte**

2. Notăm cu $U(A)$ mulţimea elementelor inversabile ale lui A şi cu $N(A)$ mulţimea elementelor nilpotente ale lui A. Observăm că dacă $x \in N(A)$, atunci $1 + x \in U(A)$: există k astfel încât $x^{2k+1} = 0$, deci

   $$(1 + x) \cdot (1 - x + ... + x^{2k}) = 1 + x^{2k+1} = 1. \qquad \textbf{1 punct}$$

   Mai mult, dacă $x, y \in N(A)$, atunci

   $$(1 + x) \cdot (1 + y) = 1 + x + y + x \cdot y = 1 + z,$$

   unde $z = x + y + x \cdot y \in N(A)$. Prin urmare $(\{1 + x | x \in N(A)\}, \cdot)$ este subgrup cu n elemente al grupului $(U(A), \cdot)$. .... **1 punct**

   Într-un inel comutativ finit, orice element neinversabil este divizor al lui zero. .... **1 punct**

   Rezultă că $U(A)$ are $q - d$ elemente, unde q este numărul elementelor lui A. Din teorema lui Lagrange obţinem că n divide $q - d$. **1 punct**

   Pe de altă parte, $(N(A), +)$ este subgrup al grupului $(A, +)$. Folosind din nou teorema lui Lagrange deducem că n divide q. Prin urmare n divide d. .... **1 punct**

Problema 3. Să se determine numerele naturale $n \geq 2$ cu proprietatea că în inelul $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ *exact* un element *nu* se poate scrie ca sumă de două pătrate.

Soluţie şi barem: Cum $0, 1, 2$ sunt toate sume de două pătrate, rezultă că $n \geq 4$. Fie $k \in \{3, ..., n-1\}$ astfel încât $\widehat{k}$ nu se poate scrie ca sumă de două pătrate în $\mathbb{Z}_n$, şi să notăm cu $S = \mathbb{Z}_n \backslash \{\widehat{k}\}$. Cum orice element din S se scrie ca sumă de două pătrate, rezultă că S este închisă la înmulţirea din $\mathbb{Z}_n$. .... **1 punct**

Dacă k ar fi par, atunci $k = 2l$. Fiindcă $\widehat{l} \neq \widehat{k}$, rezultă că $\widehat{l} \in S$. Cum $\widehat{2} \in S$, ar rezulta că $\widehat{k} = \widehat{2} \cdot \widehat{l} \in S$, absurd. Deci k este impar. .... **1 punct**

- Dacă $\widehat{k} \notin U(\mathbb{Z}_n)$, atunci $-\widehat{1} \in S$. Fiindcă $\widehat{k} = (-\widehat{1}) \cdot (-\widehat{k}) \notin S$, rezultă că $-\widehat{k} \notin S$. Deci $\widehat{k} = -\widehat{k}$, de unde rezultă că $n = 2k$. Fiindcă k este impar, avem că $\widehat{k}(\widehat{k} - \widehat{1}) = 0$. De aici rezultă că $\widehat{k} = \widehat{k}^2 = \widehat{k}^2 + \widehat{0}^2 \in S$, contradicţie. .... **2 puncte**

- Dacă $\widehat{k} \in U(\mathbb{Z}_n)$, cum $U(\mathbb{Z}_n) \backslash \{\widehat{k}\}$ este închisă la înmulţire, rezultă că $U(\mathbb{Z}_n) \backslash \{\widehat{k}\}$ este subgrup al lui $U(\mathbb{Z}_n)$. Din teorema lui Lagrange, $\phi(n) - 1 | \phi(n) \Rightarrow \phi(n) = 2$. De aici rezultă că $n \in \{4, 6\}$. Cum în $\mathbb{Z}_6$ orice element se poate scrie ca sumă de două pătrate, rezultă că n poate fi numai 4. .... **2 puncte**

  Se vede uşor că $\widehat{3}$ este singurul element din $\mathbb{Z}_4$ care nu se poate scrie ca sumă de două pătrate, deci $n = 4$ este singurul număr cu proprietatea din enunţ. .... **1 punct**

Problema 4. Să se determine toate funcţiile $f : [0,1] \to [0,1]$ continue şi bijective cu proprietatea că

$$\int_0^1 g(f(x))dx = \int_0^1 g(x)dx,$$

pentru orice funcţie continuă $g : [0,1] \to \mathbb{R}$.

Soluţie şi barem: Funcţia f este strict monotonă. Presupunem mai întâi că f este strict crescătoare. Atunci pentru orice $c \in [0,1]$ să considerăm funcţia

$$g_c(x) = \begin{cases} x - c, & x \in [0,c) \\ 0, & x \in [c,1]. \end{cases}$$

Relaţia $\int_0^1 g_c(f(x))dx = \int_0^1 g_c(x)dx$ este echivalentă cu

$$\int_0^{f^{-1}(c)} (f(x) - c)dx = \int_0^c (x - c)dx,$$

adică

$$\int_0^{f^{-1}(c)} f(x)dx = cf^{-1}(c) - \frac{c^2}{2}.$$ **3 puncte**

Notând $f^{-1}(c) = t$, obţinem

$$\int_0^t f(x)dx = tf(t) - \frac{f^2(t)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^t (f(x) - x)dx = -\frac{(f(t) - t)^2}{2}.$$ **1 punct**

Notând cu $h(x) = f(x) - x$ pentru $x \in [0,1]$, relaţia de mai sus devine

$$\int_0^t h(x)dx = -\frac{h(t)^2}{2}, \forall t \in [0,1]. \qquad (1)$$

Observăm că h este continuă şi că $h(0) = h(1) = 0$. Fie t_0 un punct de minim global al lui h. Dacă $h(t_0) < 0$, atunci $t_0 < 1$. Mai mult, există $\delta > 0$ astfel încât $h(x) < 0$ pentru orice $x \in [t_0, t_0 + \delta]$. Aşadar,

$$\int_0^{t_0+\delta} h(x)dx < \int_0^{t_0} h(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{h(t_0+\delta)^2}{2} < -\frac{h(t_0)^2}{2} \Rightarrow h(t_0+\delta) < h(t_0).$$

Aceasta contrazice alegerea lui t_0 ca punct de minim global. Aşadar, $h(t_0) \geq 0$, deci $h(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [0,1]$. Din (**??**) rezultă că $h(x) = 0$, deci $f(x) = x$ pentru orice $x \in [0,1]$. .... **2 puncte**

Dacă f este strict descrescătoare, observăm că funcţia $1 - f(x)$ este strict crescătoare şi satisface condiţia din enunţ. Din cele de mai sus rezultă că $1 - f(x) = x \Rightarrow f(x) = 1 - x$ pentru orice $x \in [0,1]$. .... **1 punct**