MINISTERUL EDUCAȚIEI

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Locală - 26 februarie 2022
CLASA a X-a – enunţuri

Timp de lucru 180 de minute
Fiecare problemă se punctează cu 1 punct

Alegeţi varianta de răspuns. Pentru fiecare întrebare, un singur răspuns este cel corect.

1. Dacă $x \in \mathbb{R}$ şi $\sqrt[8x-1]{16x} = \sqrt[4-4x]{8x}$, stabiliţi care dintre următoarele numere este pătratul unui număr natural:
A $2x^2$ **B** $8x^3$ **C** $4x^4$ **D** $6x^2$ **E** $12x^3$

2. Ştiind că $a = \log_3 120$ şi $b = \log_3 2$, numărul $c = \log_3 90$ este egal cu:
A $1 + a - 2b$ **B** $a - 2b - 1$ **C** $2 + a - b$ **D** $1 - a - 2b$ **E** $1 + a - b$

3. Se consideră expresia $E(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$ şi numărul $w = 2 - \sqrt[3]{2}$. Numărul $E(w)$ este egal cu:
A 6 **B** -4 **C** $8\sqrt[3]{2}$ **D** $\sqrt[3]{16}$ **E** 7

4. Se consideră numerele $x_k = (\sqrt[5]{4})^{80-k} \cdot (\sqrt[3]{2})^k, k = \overline{0, 80}$. Numărul numerelor raţionale, din mulţimea $M = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{80}\}$, este egal cu:
A 6 **B** 38 **C** 39 **D** 7 **E** 12

5. Partea întreagă a numărului $a = \log_2 5 + \log_{25} 256$ este egală cu:
A 2 **B** 3 **C** 4 **D** 5 **E** 6

6. Se consideră o funcţie injectivă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că există un număr real a astfel încât: $f(x) \cdot f(1 - x) = f(a \cdot x - 1), \forall x \in \mathbb{R}$. Numărul a este egal cu:
A -2 **B** -1 **C** 0 **D** 1 **E** $\frac{1}{2}$

7. **(SGM 9/2021, enunţ modificat/adaptat)** Cel mai mic număr întreg m pentru care inegalitatea $4^x + (m - 1) \cdot 2^{x+1} + m - 1 \geq 0$ este adevărată pentru orice număr real x, este egal cu:
A 0 **B** 1 **C** 2 **D** -2 **E** -1

8. Ordinea crescătoare a numerelor $m = \sqrt[6]{6400}$, $n = 5 \cdot \sqrt[3]{3}$, $p = 3 \cdot \sqrt[3]{2}$ este:
A p, m, n **B** m, n, p **C** m, p, n **D** p, n, m **E** n, p, m

9. Dacă $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, şi funcţia $f : \mathbb{R} \to [a, b], f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x + 1}$, este surjectivă, atunci numărul $c = 3a + 2b$ este egal cu:
A 2 **B** 3 **C** 0 **D** 4 **E** 1

10. Dacă $a, b \in (0, +\infty), a \neq b$, iar $2 + \log_2 a + \log_2 b = \log_2(2a^2 + ab + b^2)$, atunci numărul $c = \dfrac{a}{b}$ este egal cu:
A $\frac{1}{3}$ **B** $\frac{3}{2}$ **C** 3 **D** 2 **E** $\frac{1}{2}$

11.(SGM 11/2021, enunţ modificat) Suma soluţiilor reale ale ecuaţiei $\sqrt{5 + x} - \sqrt[3]{x + 1} = 2$ este egală cu:
A -6 **B** $-1 - 2\sqrt{17}$ **C** $1 + 2\sqrt{17}$ **D** 6 **E** 10

12.(SGM 11/2021, enunţ modificat) Dacă $a > 1$ este număr real astfel încât $a^4 + \dfrac{1}{a^4} = \dfrac{6817}{1296}$, atunci numărul $b = a - \dfrac{1}{a}$ este egal cu:
A $\frac{1}{6}$ **B** $\frac{2}{3}$ **C** $\frac{7}{6}$ **D** $\frac{5}{6}$ **E** $\frac{7}{12}$

13.(SGM 11/2021) Dacă (x_1, x_2, x_3) este o soluţie a sistemului de ecuaţii:

$$\begin{cases} \log_3(1+x_1) = \log_7(3+x_2+x_3) \\ \log_3(1+x_2) = \log_7(3+x_3+x_1) \\ \log_3(1+x_3) = \log_7(3+x_2+x_1) \end{cases}$$

pentru care $x_1 \le x_2 \le x_3$, atunci numărul $T = x_1 + 2 \cdot x_2 - 4 \cdot x_3$ aparţine intervalului:

A $\left(-\dfrac{8}{3}, \dfrac{1}{7}\right)$ **B** $\left(-\dfrac{5}{3}, -\dfrac{2}{7}\right)$ **C** $\left(\dfrac{1}{7}, \dfrac{7}{3}\right)$ **D** $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{8}{7}\right)$ **E** $\left(-\dfrac{11}{7}, -\dfrac{1}{3}\right)$

14.(SGM 10/2021, enunţ modificat) Dacă $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, a \le b$, este soluţie a sistemului de ecuaţii $\begin{cases} 9^x + 7x = 5y + 4 \\ 9^y + 7y = 5x + 4 \end{cases}$, atunci numărul $M = \dfrac{a+b}{a \cdot b}$ este egal cu:

A $\dfrac{1}{2}$ **B** 2 **C** $\dfrac{1}{4}$ **D** 4 **E** 1

15. Produsul soluţiilor reale ale ecuaţiei $4 + 4^x \cdot \log_2 x = 2^{2x+1} + \log_2(x^2)$ este egal cu:

A $\dfrac{1}{2}$ **B** 2 **C** $\dfrac{9}{2}$ **D** 8 **E** 4

16. Cel mai mare număr întreg k, pentru care inegalitatea $\log_{\frac{k-1}{k+1}}(x^2+3) \ge 1$ este adevărată pentru orice număr real x, este egal cu:

A -4 **B** -3 **C** -2 **D** 0 **E** 3

17. Dacă $a, b, c \in (1, +\infty)$ şi $a + b + c = 4$, atunci valoarea minimă a expresiei $E = \dfrac{\log_a b}{a+b} + \dfrac{\log_b c}{b+c} + \dfrac{\log_c a}{c+a}$ este egală cu:

A $\dfrac{3}{2}$ **B** $\dfrac{3}{4}$ **C** $\dfrac{4}{3}$ **D** $\dfrac{9}{8}$ **E** $\dfrac{9}{16}$

18.(GM 6-7-8/2021) Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie crescătoare cu proprietatea că $f(f(x)) + f(x) = 2x - 3, \forall x \in \mathbb{R}$, atunci numărul $P = f\left(\dfrac{3}{2}\right) \cdot f\left(\dfrac{4}{3}\right) \cdot f\left(\dfrac{5}{4}\right) \cdot ... \cdot f\left(\dfrac{2022}{2021}\right)$ este egal cu:

A $1011 \cdot 2023$ **B** 1011 **C** $\dfrac{1}{2021!}$ **D** $\dfrac{1}{2022!}$ **E** 2022!

19. Funcţia bijectivă $f : \mathbb{R} \to (7, +\infty), f(x) = 81^x + 9^x + 7$, are inversa g. Numărul $s = g(19) + g(97)$ este egal cu:

A -1 **B** $\dfrac{1}{2}$ **C** $-\dfrac{1}{4}$ **D** $\dfrac{3}{2}$ **E** $\dfrac{3}{4}$

20. Se consideră mulţimea $\mathcal{S}(a) = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \log_a x - \log_{a^2} x + \log_{a^4} x \ge \dfrac{3}{4}\right\}$. Numărul elementelor mulţimii $\mathcal{D} = S(2022) \setminus S(2048)$ este egal cu:

A 27 **B** 26 **C** 0 **D** 1026 **E** 13

21. Numărul elementelor mulţimii $\mathcal{A} = \left\{n \in \mathbb{Z} \,\middle|\, 1 + \log_2(n+1) = n + \cos\dfrac{n\pi}{6}\right\}$ este egal cu:

A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** 6

22. Se consideră funcţiile $f_1, f_2, f_3, f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite prin:

$$f_1(x) = 2^x - 1, \quad f_2(x) = 2022 + x^{2021}, \quad f_3(x) = \log_2(1+x^4), \quad f_4(x) = \begin{cases} x+3, & x \le 1 \\ 4^x, & x > 1 \end{cases}.$$

Dintre cele considerate, funcţiile surjective sunt:

A f_1, f_3 **B** f_2, f_4 **C** f_1, f_4 **D** f_2, f_3 **E** f_1, f_2

23. Se consideră funcţiile $f_1, f_2, f_3, f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite prin:

$$f_1(x) = 2^x - 1, \quad f_2(x) = 2022 + x^{2021}, \quad f_3(x) = \log_2(1 + x^4), \quad f_4(x) = \begin{cases} x+3, & x \le 1 \\ 4^x, & x > 1 \end{cases}.$$

Dintre cele considerate, funcţiile injective sunt:

A f_1, f_2, f_4 **B** f_1, f_3, f_4 **C** f_1, f_2, f_3 **D** doar f_2, f_3 **E** doar f_1, f_3

24. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - x + \sqrt{x^2 - x + 2}$ şi mulţimea $T = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| f(x) = 4 \right\}$. Numărul $w = \sum_{x \in T} \frac{1}{x^2}$ este egal cu:

A $\frac{5}{2}$ **B** 2 **C** $\frac{5}{4}$ **D** $\frac{1}{2}$ **E** $\frac{3}{4}$

Ministerul Educației

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa locală - 26 februarie 2022

CLASA a X-a

Grila de răspunsuri

1. B
2. A
3. A
4. A
5. C
6. C
7. B
8. A
9. E
10. E
11. E
12. D
13. A
14. D
15. B
16. C
17. D
18. C
19. D
20. B
21. B
22. B
23. A
24. C