MINISTERUL EDUCAȚIEI

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală - 26 februarie 2022
CLASA a XI-a – enunţuri

Timp de lucru 180 de minute
Fiecare problemă se punctează cu 1 punct

Alegeţi varianta de răspuns. Pentru fiecare întrebare, un singur răspuns este cel corect.

1. Fie matricea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ astfel încât $\det(A) = 1 + i$. Valoarea expresiei $\det(A^3) + \det(iA)$ este:

A 0 **B** $1 - i$ **C** $-1 + i$ **D** $3 - 3i$ **E** $-2 + i$

2. Dacă $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ este o soluţie a ecuaţiei $x^5 = 1$, atunci determinantul $\begin{vmatrix} z & -z & 0 \\ 0 & z^2 & -1 \\ 1 & z & 1+z \end{vmatrix}$ are valoarea:

A -1 **B** 1 **C** 0 **D** -4 **E** 4

3. Considerăm permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Numărul soluţiilor ecuaţiei $x^2 = \sigma$, $x \in S_4$, este egal cu:

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** 4

4. Suma numerelor reale a şi b pentru care $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + ax) = b$ este egală cu:

A 1 **B** $-\frac{1}{2}$ **C** $\frac{1}{2}$ **D** $\frac{3}{2}$ **E** -1

5. Mai jos sunt enumerate cinci enunţuri referitoare la şiruri de numere reale.

A. Orice şir convergent este monoton şi mărginit.
B. Orice şir monoton are limită.
C. Orice şir descrescător este mărginit superior.
D. Orice şir mărginit conţine un subşir convergent.
E. Orice şir conţine un subşir monoton.

Care dintre aceste afirmaţii este falsă?

A **B** **C** **D** **E**

6. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Suma elementelor matricei A^{2022} este egală cu:

A -8088 **B** -6063 **C** 0 **D** 1011 **E** 6066

7. Limita $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}\right)^x$ este egală cu:

A $\frac{1}{e^2}$ **B** $\frac{1}{e}$ **C** 1 **D** $\sqrt{e}$ **E** e

Problemele 8 şi 9 se referă la următorul enunţ:
Se consideră şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_1 = 1$ şi $x_{n+1} = x_n + 2^{-x_n}$, pentru orice $n \geq 1$.

8. Atunci:

A $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \infty$ **B** $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent. **C** $(x_n)_{n \geq 1}$ este mărginit.
D $(x_n)_{n \geq 1}$ nu are limită. **E** $(x_n)_{n \geq 1}$ nu este monoton

9. Limita $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_n}{\ln n}$ este egală cu:

A e **B** $\ln 2$ **C** $\frac{1}{e}$ **D** $\frac{1}{\ln 2}$ **E** $\frac{1}{e \ln 2}$

10. Şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este definit astfel: $a_1=\sqrt{8}$ şi $a_{n+1}=\sqrt{a_n^2+\dfrac{2}{3^n}}$, $n\in\mathbb{N}^*$. Atunci:

A $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ **B** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$ **C** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=2$ **D** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=3$ **E** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$

11. Fie $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $\det(A)=\mathrm{Tr}(A)=1$ şi $M=\{A^n \mid n\in\mathbb{N}^*\}$. Numărul elementelor mulţimii M este:

A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 6 **E** ∞

12. Fie $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, cu $\det(A)=5$ şi $\mathrm{Tr}(A)=6$. Notăm $M=\{a\in\mathbb{R} \mid \det(A^4+aA^2+25I_2)=25\}$. Atunci:

A $M=\{25\}$ **B** $M=\{-27,-25\}$ **C** $M=\{0\}$ **D** $M=\{-10,9\}$ **E** $M=\{-25\}$

13. Valoarea maximă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\begin{vmatrix} x & x & x & x\\ x & 1 & 1 & 1\\ x & 1 & 3 & 3\\ x & 1 & 3 & 5\end{vmatrix}$, $x\in\mathbb{R}$, este:

A 0 **B** $\dfrac{1}{2}$ **C** 1 **D** 2 **E** 8

Problemele 14-15 se referă la următorul enunţ:
Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & -4\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.

14. Atunci A^{2022} este:

A I_2 **B** O_2 **C** $3A$ **D** $2021A$ **E** $4^{2021}A$

15. Numărul matricelor $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $X^{2022}=A$ este egal cu:

A 1011 **B** 2022 **C** 2 **D** 0 **E** 1

16. Fie $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $A\cdot A^T=I_3$, unde prin A^T am notat transpusa matricei A. Atunci:

A $\mathrm{Tr}(A)=3$ **B** $\det(A)=1$ **C** $A=A^T$ **D** $\det(A^2-I_3)=0$ **E** $\det(A-I_3)=0$

17. Fie $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq 4}\in\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ astfel încât pe diagonala principală avem zerouri (deci $a_{ii}=0$ pentru $i\in\{1,\ldots,4\}$), iar în rest numere reale nenule. Numărul termenilor nenuli ai sumei
$s=\sum\limits_{\sigma\in S_4} a_{1\sigma(1)}\cdot a_{2\sigma(2)}\cdot a_{3\sigma(3)}\cdot a_{4\sigma(4)}$ este:

A 9 **B** 23 **C** 12 **D** 8 **E** 7

18. Definim şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ prin $a_n=[\sqrt{2}+\{n\sqrt{2}\}]$, $n\in\mathbb{N}^*$, unde $[x]$ şi $\{x\}$ reprezintă partea întreagă şi respectiv partea fracţionară a numărului real x. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ este:

A $\sqrt{2}$ **B** $2\sqrt{2}$ **C** 0 **D** $1+\sqrt{2}$ **E** ∞

19. Fie şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin relaţia de recurenţă $x_{n+1}\cdot x_{n-1}^5=x_n^6$, cu $x_0=4$ şi $x_1=2$. Limita şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ este:

A ∞ **B** 0 **C** 1 **D** 2 **E** 5

20. Se consideră matricele $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $AB+5I_n=3A+2B$. Câte dintre următoarele patru afirmaţii sunt adevărate?

(1) $A-2I_n$ este inversabilă (2) $B-3I_n$ este inversabilă
(3) $AB=BA$ (4) Ecuaţia $AX=2X$ are soluţii nenule în $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** 4

21. Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este definit prin $x_n = \dfrac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}+\sqrt{n-2}-\ldots+(-1)^{n-1}\sqrt{1}}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$. Atunci:

A $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ **B** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$ **C** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ **D** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ **E** $(x_n)_{n\geq 1}$ nu are limită

Problemele 22-23 se referă la următorul enunţ:

Considerăm şirul $(e_n)_{n\geq 1}$ definit prin $e_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

22. Limita şirului $x_n = \dfrac{n\left(\sqrt[n]{e_n}-1\right)}{\ln e_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ este:

A 0 **B** $\dfrac{1}{e}$ **C** $\dfrac{1}{2}$ **D** 1 **E** e

23. Limita şirului $y_n = \sqrt[n]{n!}\left(e^{\sqrt[n]{e_n}-1}-1\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$ este:

A 0 **B** $\dfrac{1}{e}$ **C** 1 **D** e **E** ∞

24. Fie $L = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{n}\right)^n$. Atunci

A $L = 0$ **B** $L = 1$ **C** $L = e$ **D** $L = e^2$ **E** $L = \infty$

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa locală - 26 februarie 2022

CLASA a XI-a

Grila de răspunsuri

1. C
2. A
3. A
4. C
5. A
6. B
7. E
8. A
9. D
10. D
11. D
12. B
13. C
14. E
15. C
16. D
17. A
18. A
19. B
20. D
21. B
22. D
23. B
24. E