Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală - 26 februarie 2022

CLASA a XII-a – enunţuri

Timp de lucru 180 de minute
Fiecare problemă se punctează cu 1 punct

Alegeţi varianta de răspuns. Pentru fiecare întrebare, un singur răspuns este cel corect.

1. Fie operaţia $\perp$ definită prin $x \perp y = xy - 6x - 6y + 42$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Această operaţie nu este lege de compoziţie pe:
A. $\mathbb{R}$.
B. $\mathbb{R} \setminus \{6\}$.
C. $(6, \infty)$.
D. $(-\infty, 6)$.
E. $\mathbb{Q}$.

2. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (ax + b)\, e^x$ este o primitivă a funcţiei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = (3x + 2)\, e^x$ dacă:
A. $a = 3, b = 1$.
B. $a = 3, b = -1$.
C. $a = 3, b = 0$.
D. $a = 3, b = 2$.
E. $a = 3, b = -2$.

3. Fie legea asociativă $*$ definită pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ prin $x * y = (x - 3)(y - 3) + 3$. Atunci $\frac{7}{2} * \frac{11}{3} * \frac{15}{4} * \frac{19}{5} * \frac{23}{6}$ este egal cu:

A. $\frac{27}{7}$.
B. $\frac{19}{6}$.
C. $\frac{1}{6}$.
D. $\frac{7}{2}$.
E. 3.

4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă cu derivata continuă astfel încât $f'(0) = 2$. Notăm cu F o primitivă a lui f. Atunci $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{F(x) + F(-x) - 2F(0)}{x^2}$ este egală cu:
A. 0.
B. 1.
C. 2.
D. -1.
E. -2.

5. Pe $\mathbb{Z}_8$ definim legea $\circ$ prin $a \circ b = ab + a + b$, pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}_8$. Numărul soluţiilor ecuaţiei $x \circ x = \widehat{7}$ este:
A. 0.
B. 1.
C. 2.
D. 4.
E. 8.

6. Fie funcţia $f : \left[\frac{1}{2}, \infty\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{x} (t-1)\ln(t)\,dt$. Atunci:
A. $x = 1$ este punct de minim al funcţiei f.
B. $x = 1$ este punct de maxim al funcţiei f.
C. f este descrescătoare pe $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$.
D. f este crescătoare pe $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$.
E. Toate răspunsurile anterioare sunt false.

7. Pe $(0, \infty)$ definim legea de compoziţie $\perp$ prin $u \perp v = u\sqrt{1+v^2} + v\sqrt{1+u^2}$, pentru orice $u, v \in (0, \infty)$. Valoarea numărului real α, pentru care $\lim_{x\to\infty} \left((x \perp x) - \alpha x^2\right)$ există şi este finită, este egală cu:
A. 1.
B. 2.
C. 4.
D. 8.
E. Alt răspuns.

8. Fie mulţimea $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ admite primitive pe } \mathbb{R}\}$. Care dintre următoarele enunţuri este fals?
A. Pentru orice $g, h \in \mathcal{F}$ avem $g + h \in \mathcal{F}$.
B. Pentru orice $g, h \in \mathcal{F}$ avem $g - h \in \mathcal{F}$.
C. Pentru orice $g, h \in \mathcal{F}$ avem $gh \in \mathcal{F}$.
D. Pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $g \in \mathcal{F}$ avem $\alpha g \in \mathcal{F}$.
E. $\mathcal{F}$ este grup în raport cu operaţia de adunare a funcţiilor.

9. Pe $\mathbb{R}$ definim legea asociativă $*$ prin $a * b = 3(a-2)(b-2) + 2$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$. Pentru un număr real α definim şirul $(x_n)_{n\geq 2}$ prin relaţia $x_n = \underbrace{\alpha * \alpha * ... * \alpha}_{n \text{ de } \alpha}$. Mulţimea tuturor valorilor posibile ale numărului α pentru care şirul $(x_n)_{n\geq 2}$ este mărginit este:
A. $\emptyset$.
B. $\{2\}$.
C. $\left\{\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right\}$.
D. $\left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$.
E. $\left[\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right]$.

10. Valoarea integralei $I = \displaystyle\int_0^1 (x\cos(x) + \sin(x))\, dx$ este:
A. 0.
B. 1.
C. $\cos(1)$.
D. $\sin(1)$.
E. $\sin(1) + \cos(1)$.

11. Cel mai mic număr natural nenul n, pentru care $\widehat{2} \cdot \widehat{7} \cdot \widehat{12} \cdot \ldots \cdot (\widehat{5n+2}) = \widehat{0}$ în $\mathbb{Z}_{2022}$, este:
A. 1011.
B. 37.
C. 337.
D. 67.
E. 57.

12. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie pară şi $a \in (0, \infty)$ astfel încât $f(a) \neq 0$. Fie F o primitivă a funcţiei f cu proprietatea $F(a) = F(-a) = 0$. Atunci $\displaystyle\int_{-a}^{a} F(t)\, dt$ este egală cu:
A. a.
B. $-f(a)$.
C. $-a$.
D. $f(-a)$.
E. 0.

13. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu elementul neutru e. Se ştie că $x^2 = e$, pentru orice $x \in G$. Câte morfisme injective $f : G \to G$ satisfac relaţia $f(f(x)) \cdot f(x) = e$, pentru orice $x \in G$?
A. Niciunul.
B. Exact unul.
C. Exact două.
D. Un număr finit mai mare sau egal decât 3.
E. O infinitate.

14. Fie $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ o funcţie continuă şi crescătoare cu proprietatea că $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1$. Fie F o primitivă a lui f. Atunci despre $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F(n)}{f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n-1)}$ putem spune că:
A. Nu există.
B. Este egală cu 0.
C. Este egală cu 1.
D. Este egală cu $+\infty$.
E. Este egală cu 2.

15. Numărul total de valori posibile ale elementului $a \in \mathbb{Z}_{36}$, pentru care funcţia $f : \mathbb{Z}_{36} \to \mathbb{Z}_{36}$, $f(x) = ax$ este surjectivă, este egal cu:
A. 36.
B. 18.
C. 12.
D. 9.
E. 4.

16. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ definim şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ prin $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^n \, dx$. Valoarea lui n, pentru care are loc egalitatea $I_{n+2} + I_n = \frac{1}{2022}$, este:
A. 2023.
B. 2022.
C. 2021.
D. 2020.
E. 2019.

17. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu elementul neutru e. Fie $H \neq G$ o submulţime nevidă a lui G cu proprietatea că oricare ar fi $a \in H$ şi $b \in G \setminus H$ avem $ab \in H$. Considerăm enunţurile:
E1: Pentru orice $u, v \in H$ avem $uv \in H$.
E2: Pentru orice $u, v \in G \setminus H$ avem $uv \in G \setminus H$.
E3: $e \in H$.
E4: Pentru orice $x \in H$ avem $x^{-1} \in H$.

Numărul de enunţuri adevărate este egal cu:
A. 4.
B. 2.
C. 0.
D. 3.
E. 1.

18. Mulţimea tuturor valorilor posibile ale numărului real a pentru care funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \cos^2 \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ admite primitive pe $\mathbb{R}$, este:
A. $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.
B. $\{1\}$.
C. $\{0\}$.
D. $[0, 1]$.
E. $\emptyset$.

19. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu elementul neutru e. Fie $a, b \in G$, astfel încât $a^4 = e$ şi $a^2ba^{-2} = b^4$. Care dintre următoarele enunţuri este cu certitudine adevărat?
A. $a^2b^3a^{-2} = b^8$.
B. $a^2b^5a^{-2} = b^{16}$.
C. $b^{14} = e$.
D. $b^{15} = e$.

E. $b^{16} = e$.

20. Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{\text{arctg } x}{1+x^2} dx$ este:

A. $\frac{\pi^2}{4}$.
B. $\frac{\pi^2}{2}$.
C. $\frac{\pi}{4}$.
D. $\frac{\pi^2}{8}$.
E. $\frac{\pi}{8}$.

21. Fie $n \in \mathbb{N}$ şi G un grup cu $2n+1$ elemente, despre care se ştie că există o funcţie $f : G \to G$, cu proprietatea că $f(xf(xy)) = yf(x^2)$, pentru orice $x, y \in G$. Considerăm enunţurile:
E1: f este injectivă.
E2: G poate fi grup necomutativ.
E3: $x^8 y = y x^8$.
E4: $f(x) = x$, pentru orice $x \in G$.

Numărul de enunţuri adevărate este egal cu:
A. 0 .
B. 1.
C. 2.
D. 3.
E. 4.

22. Valoarea integralei $I = \int_0^{4\pi} \frac{x \cos x}{1+\sin^2 x} dx$ este:

A. 2π.
B. 2.
C. π.
D. 1.
E. 0.

23. Fie $A \subset \mathbb{Z}$ o mulţime care are ca elemente toate numerele naturale prime, opusele lor, 0, 1 şi -1. Fie enunţurile:
E1: Adunarea numerelor nu este lege de compoziţie pe A.
E2: Înmulţirea numerelor nu este lege de compoziţie pe A.
E3: Există o infinitate de operaţii $*$ care pot fi legi de compoziţie pe A.
E4: Există cel puţin o operaţie $*$ care defineşte o structură de grup abelian pe A.

Numărul de enunţuri adevărate este egal cu:
A. 0.
B. 1.
C. 2.
D. 3.
E. 4.

24. Spunem că o funcţie integrabilă $f : [0,1] \to [0,1]$ are proprietatea P dacă

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx - \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Fie enunţurile:
E1: Există funcţii continue care au proprietatea P.
E2: Există funcţii discontinue care au proprietatea P.
E3: Există funcţii monotone care au proprietatea P.
E4: Există funcţii nemonotone care au proprietatea P.

Numărul de enunţuri adevărate este egal cu:
A. 3.
B. 4.
C. 0.
D. 1.
E. 2.

Ministerul Educației

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa locală - 26 februarie 2022

CLASA a XII-a

Grila de răspunsuri

1. **Răspuns:** D
2. **Răspuns:** B
3. **Răspuns:** B
4. **Răspuns:** C
5. **Răspuns:** C
6. **Răspuns:** D
7. **Răspuns:** B
8. **Răspuns:** C
9. **Răspuns:** E
10. **Răspuns:** D
11. **Răspuns:** D
12. **Răspuns:** E
13. **Răspuns:** B
14. **Răspuns:** C
15. **Răspuns:** C
16. **Răspuns:** C
17. **Răspuns:** B
18. **Răspuns:** A
19. **Răspuns:** D
20. **Răspuns:** D
21. **Răspuns:** D
22. **Răspuns:** E
23. **Răspuns:** E
24. **Răspuns:** A