Examenului național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică M_mate-info

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
- ***Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.***
- ***Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.***

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$. Calculaţi $z+\frac{1}{z}$.

5p **2.** Valoarea maximă a funcției $f:R\to R$, $f(x)=ax^2+4x+a+2$, unde $a\neq 0$, este egală cu -1. Arătaţi că vârful parabolei asociate funcției *f* se află pe dreapta *d* de ecuație $y=4x-3$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuația $\frac{1}{3^x-1}-3^{x-2}=\frac{1}{6}$.

5p **4.** Fie mulțimea $A=\{4,5,6,7,8,9\}$. Calculați probabilitatea ca, alegând una dintre submulțimile cu trei elemente ale mulțimii *A*, suma elementelor acestei submulţimi să fie număr par.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,-2)$, $B(-2,1)$ şi $M(2,3)$. Determinați ecuația perpendicularei duse prin punctul M pe dreapta AB.

5p **6.** Calculaţia aria paralelogramului *ABCD* în care $AB=8$, $AD=12$ şi $m(\sphericalangle ABC)=135°$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y+2z=3 \\ mx+y+z=3m \end{cases}$, unde *m* este un număr real.

5p **a)** Determinaţi valorile $m\in R$ pentru care sistemul are soluție unică.

5p **b)** Arătaţi că, pentru orice valoare a numărului real *m*, sistemul este compatibil.

5p **c)** Notăm cu *S* mulţimea soluţiilor sistemului pentru $m=1$. Determinaţi cea mai mică valoare a mulţimii $M=\left\{x^2+y^2+z^2 \,\middle|\, (x,y,z)\in S\right\}$.

2. Se consideră mulţimea $G=(-1,\infty)$ pe care se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy+x+y$. Presupunem cunoscut că $(G,\circ)$ este grup.

5p **a)** Determinaţi elementul neutru al grupului $(G,\circ)$.

5p **b)** Arătaţi că funcția $f:(-1,\infty)\to(0,\infty)$, $f(x)=x+1$, este un morfism între grupul $(G,\circ)$ şi grupul multiplicativ $((0,\infty),\cdot)$ al numerelor reale pozitive.

5p **c)** Calculaţi $1\circ\frac{1}{2}\circ\frac{1}{3}\circ\ldots\circ\frac{1}{2022}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:R\to R$, $f(x)=x-\ln\left(e^x+1\right)$.

5p **a)** Calculaţi $f'(0)$.

5p **b)** Arătaţi că funcţia f' este strict descrescătoare pe R.

5p **c)** Determinaţi asimptotele graficului funcţiei *f*.

2. Se consideră funcțiile $f:(-1,+\infty)\to R$, $f(x)=x-\ln(1+x)$ şi $F:(-1,+\infty)\to R$, $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$.

5p **a)** Verificați egalitatea $F(1)=\frac{3}{2}-2\ln 2$.

5p **b)** Calculați $\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^3}$.

5p **c)** Arătați că F este funcţie crescătoare.

Simularea Examenului național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică M_mate-info

Barem de evaluare şi de notare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
• Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
• Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
• Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{1}{z}=\frac{2}{1-i\sqrt{3}}=\frac{2(1+i\sqrt{3})}{1+3}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$	**3p**
	$z+\frac{1}{z}=1$	**2p**
2.	Valoarea extremă a funcţiei *f* este $y_V=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{16-4a(a+2)}{4a}=\frac{a^2+2a-4}{a}$	**1p**
	Funcţia *f* admite valoarea maximă -1 dacă $a<0$ şi $y_V=-1$, de unde $a=-4$	**2p**
	$x_V=-\frac{4}{2a}=\frac{1}{2}$, deci $4x_V-3=-1=y_V$, adică $V\in d$	**2p**
3.	Cu substituţia $3^x=t$, $t>0$, ecuaţia devine $\frac{1}{t-1}-\frac{9}{t}=\frac{1}{6}$, de unde $2t^2+t-21=0$	**3p**
	Convine doar $t=3$, pentru care se obţine soluţia $x=1$	**2p**
4.	Numărul de cazuri posibile este $C_6^3=20$	**2p**
	Suma a trei numere naturale este număr par dacă toate cele trei numere sunt pare sau dacă un număr este par şi celelalte două impare, deci numărul de cazuri favorabile este $C_3^3+C_3^1\cdot C_3^2=10$	**2p**
	Probabilitatea este $p=\frac{1}{2}$	**1p**
5.	Notând cu *d* dreapta cerută, din $d\perp AB$ rezultă că $m_d\cdot m_{AB}=-1$	**1p**
	$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=-\frac{1}{2}$, deci $m_d=2$	**2p**
	Ecuaţia dreptei *d* este $y-y_M=m_d(x-x_M)$, adică $y=2x-1$	**2p**
6.	$m(\measuredangle ABC)=135^\circ \Rightarrow m(\measuredangle DAB)=180^\circ-135^\circ=45$	**1p**
	$S[ABCD]=AB\cdot AD\cdot\sin(\measuredangle BAD)=$	**2p**
	$=48\sqrt{2}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	Determinatul matricei sistemului este $\det A=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&-1&2\\m&1&1\end{vmatrix}=3m-3$	**3p**
	Sistemul are soluţie unică dacă şi numai dacă $\det A\neq 0$, adică $m\in R\setminus\{1\}$	**2p**

b)	Pentru $m \neq 1$ sistemul este compatibil determinat Pentru $m=1$, $\text{rang}A = 2$, iar un minor principal este $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ Există un singur minor caracteristic şi anume $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, deci sistemul este compatibil	**1p** **2p** **2p**
c)	Pentru $m=1$, sistemul admite soluţiile $x = 2-\alpha,\ y=1,\ z=\alpha$, unde $\alpha \in R$ $x^2+y^2+z^2 = 2\alpha^2 - 4\alpha + 5 = 2(\alpha-1)^2 + 3$, deci $\min M = 3$, care se obţine pentru $x=y=z=1$	**2p** **3p**
2.a)	$e \in G$ este element neutru dacă $x \circ e = e \circ x = x$, pentru orice $x \in G$ $x \circ e = x \Leftrightarrow e(x+1) = 0$, de unde $e = 0$ Cum $0 \in G$ şi $0 \circ x = 0 \cdot x + 0 + x = x$, pentru orice $x \in G$, rezultă că $e=0$ este elementul neutru	**1p** **2p** **2p**
b)	$f(x \circ y) = x \circ y + 1 = xy + x + y + 1 =$ $= (x+1)(y+1) = f(x) \cdot f(y)$, pentru orice $x, y \in G$, deci *f* este morfism	**2p** **3p**
c)	$x_1 \circ x_2 = (x_1+1)(x_2+1) - 1;\ x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_n = (x_1+1)(x_2+1)\ldots(x_n+1) - 1$, pentru orice $n \geq 2$ şi orice $x_1, x_2, \ldots, x_n \in G$ $1 \circ \frac{1}{2} \circ \frac{1}{3} \circ \ldots \circ \frac{1}{2022} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{2022}{2021} \cdot \frac{2023}{2022} - 1 = 2023 - 1 = 2022$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{1}{e^x+1}$, pentru orice $x \in R$ $f'(0) = \frac{1}{2}$	**3p** **2p**
b)	$f''(x) = -\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$, pentru orice $x \in R$ $f''(x) < 0$, pentru orice $x \in R$, deci f' este strict descrescătoare	**3p** **2p**
c)	*f* este continuă pe *R*, deci graficul funcţiei nu admite asimptote verticale $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) = \ln 1 = 0$, deci $y=0$ este asimptotă (orizontală) la $+\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(f(x) - x\right) = 0$, deci $y = x$ este asimptotă (oblică) la $-\infty$	**1p** **2p** **2p**
2.a)	$F(1) = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 t dt - \int_0^1 (t+1)' \cdot \ln(1+t)dt =$ $= \frac{1}{2} - (t+1)\ln(t+1)\Big\vert_0^1 + \int_0^1 (t+1) \cdot \frac{1}{t+1} dt = \frac{1}{2} - 2\ln 2 + \int_0^1 dt = \frac{3}{2} - 2\ln 2$	**3p** **2p**
b)	Folosind succesiv regula lui L'Hospital, cazul $\left[\frac{0}{0}\right]$, rezultă $\lim\limits_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^3} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{3x^2} =$ $= \lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \ln(x+1)}{3x^2} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{x+1}}{6x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{6x(x+1)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{6(x+1)} = \frac{1}{6}$	**2p** **3p**

c)	$f'(x)=\frac{x}{1+x}$, $x\in(-1,\infty)$, $f'(0)=0$, $f'(x)<0$, pentru $x\in(-1,0)$, $f'(x)>0$ pentru $x\in(0,\infty)$	**3p**
	$x=0$ este punct de minim al funcției *f*, deci $f(x)\geq f(0)=0$, pentru orice $x\in(-1,\infty)$	**1p**
	$F'(x)=f(x)\geq 0$, pentru orice $x\in(-1,\infty)$, deci *F* este crescătoare	**1p**