Simulare județeană - Examenul național de bacalaureat, Ianuarie 2022
Proba E.c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profil militar, specializarea matematică-informatică

SUBIECTUL I **(30 puncte)**

5p **1.** Fie progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$. Știind că $b_2+b_5=156$ și $b_3+b_6=468$, calculați rația progresiei.

5p **2.** Determinaţi mulţimea valorilor întregi ale numărului real m, pentru care reprezentarea graficului funcţiei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2+mx+1$ nu intersectează axa Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^{x-1}-2^{x+1}+3=0$.

5p **4.** Determinați $n\in\mathbb{N}^*$ știind că numărul submulțimilor nevide cu un număr par de elemente ale unei mulțimi cu n elemente este 511.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC, M mijlocul laturii BC și punctul T mijlocul segmentului AM. Să se arate că $\overrightarrow{BT}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.

5p **6.** Determinați măsura unghiului *A* al unui triunghi *ABC*, știind că $\sin A+\cos A=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a & 2\\ a & i & a\\ -1 & a & -1\end{pmatrix}$, unde $i^2=-1$ şi a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det A(0)=i$.

5p **b)** Demonstraţi că, pentru orice număr real a, matricea $A(a)$ este inversabilă.

5p **c)** Calculaţi $\underbrace{A(0)\cdot A(0)\cdot A(0)\cdot\ldots\cdot A(0)}_{\text{de 2022 ori}}$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă şi cu element neutru $x\circ y=xy-6x-6y+42$.

5p **a)** Arătaţi că $x\circ y=(x-6)(y-6)+6$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **b)** Determinaţi perechile de numere întregi (x,x'), unde x' este simetricul lui x în raport cu legea "$\circ$"

5p **c)** Calculaţi $\frac{2022}{1}\circ\frac{2022}{2}\circ\frac{2022}{3}\ldots\circ\frac{2022}{2022}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$

5p **a)** Să se arate că $x^2\cdot f'(x)=\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)$, $\forall x\in(0,+\infty)$

5p **b)** Să se arate că graficul funcției admite o singură asimptotă.

5p **c)** Determinați cel mai mic număr întreg a pentru care $f(x)<a$.

2. Se consideră fncția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=e^x\cdot(2x^2+3x+4)$ și $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $F(x)=e^x\cdot(ax^2+bx+c)$

5p **a)** Să se determine $a,b,c\in\mathbf{R}$ astfel încât funcția F să fie primitiva funcției *f*.

5p **b)** Aflați primitiva funcției *f*, al cărei grafic conține punctul A(0;2).

5p **c)** Arătați că orice primitivă a funcției *f* este convexă pe $\mathbf{R}$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E.c)
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare și de notare

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profil militar, specializarea matematică-informatică

SUBIECTUL I **(30 puncte)**

5p	**1.** $b_2=b_1q,\ b_3=b_1q^2,\ b_5=b_1q^4,\ b_6=b_1q^5$, $b_1q\left(1+q^3\right)=156,\ \ b_1q^2\left(1+q^3\right)=468$ $q=3$	**1p** **2p** **2p**
5p	**2.** $G_f\cap Ox=\varnothing\Leftrightarrow\Delta<0$ $\Delta<0\Leftrightarrow m^2-4<0\Leftrightarrow m\in(-2,2)\cap\mathbf{Z}\Leftrightarrow m\in\{-1,0,1\}$	**2p** **3p**
5p	**3.** $\frac{4^x}{4}-2\cdot 2^x+3=0$ $2^x=t,t>0\Rightarrow t^2-8t+12=0$ $t_1=2\Rightarrow x=1$ $t_2=6\Rightarrow x=\log_2 6$	**1p** **2p** **1p** **1p**
5p	**4.** Numărul submulțimilor nevide cu un număr par de elemente este: $C_n^2+C_n^4+C_n^6+....=2^{n-1}-C_n^0=2^{n-1}-1$ $2^{n-1}-1=511\Leftrightarrow 2^{n-1}=512\Rightarrow n-1=9\Rightarrow n=10$	**3p** **2p**
5p	**5.** $\overrightarrow{BT}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BM}\right)$. Cum $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BM}\Rightarrow\overrightarrow{BT}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{BT}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)\Rightarrow\overrightarrow{BT}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$	**3p** **2p**
5p	**6.** $\sin A+\cos A=0\Leftrightarrow \mathrm{tg}A=-1$ $A\in(0,\pi)\Rightarrow A=\frac{3\pi}{4}$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 puncte)**

5p	**1. a)** $A(0)=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&i&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\Rightarrow\det A(0)=\begin{vmatrix}1&0&2\\0&i&0\\-1&0&-1\end{vmatrix}=$ $=-i+0+0-(-2i)-0-0=i$	**2p** **3p**
5p	**b)** $\det A(a)=\begin{vmatrix}1&a&2\\a&i&a\\-1&a&-1\end{vmatrix}=a^2+i$, pentru orice număr real a Cum, pentru orice număr real a, $a^2+i\neq 0$, obținem că $\det A(a)\neq 0$, deci, pentru orice număr real a, matricea $A(a)$ este inversabilă	**2p** **3p**

5p	**c)** $A(0)\cdot A(0)=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & i^2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=-I_3$ $\underbrace{A(0)\cdot A(0)\cdot A(0)\cdot\ldots\cdot A(0)}_{\text{de 2022 ori}}=\underbrace{(-I_3)\cdot(-I_3)\cdot(-I_3)\cdot\ldots\cdot(-I_3)}_{\text{de 1011 ori}}=-I_3$	**2p** **3p**
5p	**2. a)** $x\circ y=xy-6x-6y+36+6=$ $=x(y-6)-6(y-6)+6=(x-6)(y-6)+6$, pentru orice numere reale x şi y	**2p** **3p**
5p	**b)** Elementul neutru al legii de compoziţie „$\circ$” este 7 $x'\in\mathbf{Z}$ este simetricul lui $x\in\mathbf{Z}$ dacă $x\circ x'=x'\circ x=7$, de unde $x'=6+\dfrac{1}{x-6}$; $x\neq 6$ Cum $x'\in\mathbf{Z}$, obţinem $x=5$ sau $x=7$, de unde rezultă că $(\mathrm{x},\mathrm{x}')\in\{(5,5),(7,7)\}$ $x=6$ nu este simetrizabil în raport cu legea dată	**1p** **2p** **2p**
5p	**c)** $x\circ 6=6$ şi $6\circ y=6$, pentru orice numere reale x şi y Deoarece legea „$\circ$” este asociativă, avem $\dfrac{2022}{1}\circ\dfrac{2022}{2}\circ\dfrac{2022}{3}\ldots\circ\dfrac{2022}{2022}=$ $\underbrace{\dfrac{2022}{1}\circ\dfrac{2022}{2}\circ\ldots\circ\dfrac{2022}{336}}_{\mathrm{x}}\circ\dfrac{2022}{337}\circ\underbrace{\dfrac{2022}{338}\circ\dfrac{2022}{339}\circ\ldots\circ\dfrac{2022}{2022}}_{\mathrm{y}}=\mathrm{x}\circ 6\circ\mathrm{y}=(\mathrm{x}\circ 6)\circ\mathrm{y}=6\circ\mathrm{y}$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 puncte)**

5p	**1.a)** $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x+1}\cdot x-\ln(x+1)}{x^2}$ $\Rightarrow x^2\cdot f'(x)=\dfrac{x}{x+1}-\ln(x+1)$	**3p** **2p**
5p	**b)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>o}}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1\Rightarrow$ funcția nu admite asimptotă verticală. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+1}=0$ $\Rightarrow y=0$ asimptotă orizontală la $+\infty$. Graficul funcției admite o singura asimptotă	**2p** **2p** **1p**
5p	**c)** $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{x}{x+1}-\ln(x+1)\right)$ Cum $\dfrac{1}{x^2}>0,\forall x\in(0,+\infty)$, semnul derivatei este dat de semnul funcției $g(x)=\dfrac{x}{x+1}-\ln(x+1)$, $g:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$. $g'(x)=-\dfrac{x}{(x+1)^2}<0,\forall x\in(0,+\infty)$ $\Rightarrow g$ este strict descrescătoare pe $(0,+\infty)\Rightarrow g(x)<\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>o}}g(x)=0$ $\Rightarrow f'(x)<0,\ \forall x\in(0,+\infty)$ $\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(0,+\infty)$. Cum $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ și $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>o}}f(x)=1\Rightarrow f(x)\in(0,1)\Rightarrow a=1$	 **2p** **1p** **2p**
5p	**2. a)** F derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $F'(x)=f(x),(\forall)x\in\mathbb{R}$ $e^x\cdot\left[ax^2+(2a+b)x+(b+c)\right]=e^x\cdot(2x^2+3x+4),(\forall)x\in\mathbb{R}$	**1p** **2p**

	Rezultă: $\begin{cases} a=2 \\ 2a+b=3 \\ b+c=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2\in\mathbb{R} \\ b=-1\in\mathbb{R} \\ c=5\in\mathbb{R} \end{cases}$.	**2p**
5p	**b)** Din a) $F(x)=e^x\cdot\left(2x^2-x+5\right)+c,\ c\in\mathbb{R}$ este o primitivă oarecare a lui f $A(0,2)\in G_F\Rightarrow F(0)=2\Rightarrow 5+c=2\Rightarrow c=-3\in\mathbb{R}$ $F(x)=e^x\cdot\left(2x^2-x+5\right)-3,\ (\forall)\,x\in\mathbb{R}$	**2p** **2p** **1p**
5p	**c)** Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă oarecare a lui *f*. *F* convexă pe $\mathbb{R}\Leftrightarrow F''(x)>0,(\forall)\,x\in\mathbb{R}$ $F''(x)=(F'(x))'=f'(x)=e^x\cdot\left(2x^2+3x+4\right)+e^x(4x+3)=e^x\cdot\left(2x^2+7x+7\right),(\forall)\,x\in\mathbb{R}$ Deorece $e^x>0,\ (\forall)\,x\in\mathbb{R}$ și $2x^2+7x+7>0(\forall)\,x\in\mathbb{R}$ pentru că $\Delta<0$ rezultă $F''(x)>0,(\forall)\,x\in\mathbb{R}$. În consecință, F convexă pe $\mathbb{R}$.	**1p** **2p** **2p**

Coordonator grup de lucru – M_mate-info:

- Bălănescu Daniela, inspector școlar pentru matematică

Grup de lucru – Varianta 3 – M_mate-info:

- Dermengiu Alina, Colegiul Național *Mircea cel Bătrân* Constanța

- Gache Florian, Colegiul Național *Mircea cel Bătrân* Constanța

Bibliografie – Matematică – M_mate-info

1. M. Andronache, D. Șerbănescu, M. Perianu, C. Ciupală, F. Dumitrel – *Matematică pentru examenul de bacalaureat – matematică-informatică*, Ed. Art Educațional, București, 2017.

2. M. Ganga – *Elemente de analiză matematică pentru clasa a XII-a*, Ed. Mathpress, Ploiești, 2000.

3. T Cohal, Gh. Iurea - *Probleme de matematică pentru clasa a XI-a ,* Ed. Paralela 45, 2012

4. A. Zanoschi, Gh. Iurea, G.Popa, P. Răducanu, I. Şerdean - *Bacalaureat 2016– matematică, M_mate-info,* Ed. Paralela 45, 2015