Simulare județeană - Examenul național de bacalaureat, Ianuarie 2022
Proba E.c)
Matematică *M_șt-nat*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

SUBIECTUL I (30 puncte)

5p **1.** Fie progresia aritmetică $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ astfel încât $a_1=2$ și $a_3=8$. Aflați suma primilor 15 termeni.

5p **2.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f\left(x\right)=x^2-2x+m$, unde m este un parametru real. Determinați valoarea lui m pentru care functia f admite un minim egal cu 3.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x+3}-3\cdot 2^{x+2}+4=0$.

5p **4.** Aflați câte numere naturale de trei cifre distincte au cifrele din mulțimea $\{1,2,3,4,5\}$ și au o cifră egală cu 3.

5p **5.** În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A\left(2,1\right)$, $B\left(-2,\,3\right)$, $C\left(1,\,-3\right)$ și $D\left(4,a\right)$, unde $a\in\mathbf{R}$. Determinați $a\in\mathbf{R}$ astfel încât dreptele AB și CD să fie paralele.

5p **6.** Calculaţi $\cos 130^0+\cos 50^0$.

SUBIECTUL al II-lea (30 puncte)

1. Se consideră matricea $A\left(x\right)=\begin{pmatrix}1+3x & 6x\\ -x & 1-2x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A\left(1\right)\right)=2$.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui x pentru care $\det(A\left(x\right)\cdot A\left(-x\right))\geq 0$.

5p **c)** Determinați numerele naturale m și n care verifică relația $A\left(m\right)\cdot A\left(n\right)=2$.

2. Pe $\mathbf{R}$ se defineşte legea de compoziţie asociativă dată de $x\circ y=xy+2x+2y+2$.

5p **a)** Calculaţi $0\circ(-2)$.

5p **b)** Arătaţi că $x\circ y=(x+2)(y+2)-2$, pentru orice numere reale x şi *y*.

5p **c)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x\circ x\circ x=6$.

SUBIECTUL al III-lea (30 puncte)

1. Fie $f:\left[1,+\infty\right)\to\mathbb{R},\ f\left(x\right)=x\cdot\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

5p **a)** Arătați că $f'\left(x\right)=\dfrac{x^2+x-1}{\left(x+1\right)\sqrt{x^2-1}},\ x\in\left(1,+\infty\right)$.

5p **b)** Determinați asimptota spre $+\infty$ a graficului funcției f.

5p **c)** Determinați mulțimea valorilor funcției f.

2. Se consideră funcţiile $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=e^x+xe^x, g(x)=xe^x$.

5p **a)** Calculaţi $\int g(x)dx$.

5p **b)** Verificaţi dacă funcţia *g* este o primitivă a funcţiei *f*.

5p **c)** Calculaţi $\int f(x)\,\mathrm{g}(x)dx$.

Simulare județeană - Examenul național de bacalaureat, Ianuarie 2022
Proba E.c)
Matematică *M_șt-nat*
Barem de evaluare și de notare

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

SUBIECTUL I **(30 puncte)**

5p	**1.** $r = 3$ unde r este rația progresiei aritmetice $S_{15} = \frac{15(2\cdot 2+14\cdot 3)}{2} = 345$	**3p** **2p**
5p	**2.** $x_V = 1$ $a = 1 > 0$, f admite minim $f(x_V) = 3 \Rightarrow f(1) = 3$, $m = 4$	**2p** **3p**
5p	**3.** Ecuația devine, $2\cdot 2^{2x} - 3\cdot 2^x + 1 = 0$ Obținem $2^x \in \left\{\frac{1}{2}, 1\right\} \Rightarrow x \in \{-1, 0\}$	**2p** **3p**
5p	**4.** Numerele au forma $\overline{3bc}$, $\overline{a3c}$, $\overline{ab3}$, cu $a \neq b \neq c \neq a$ și $a, b, c \in \{1,2,3,4,5\}$ Sunt câte A_4^2 numere din fiecare categorie, deci vor fi $3A_4^2 = 36$ numere, în total	**2p** **3p**
5p	**5.** $m_{AB} = m_{CD}$; $m_{AB} = -\frac{1}{2}; m_{CD} = \frac{a+3}{3} \Rightarrow a = -\frac{9}{2}$	**2p** **3p**
5p	**6.** Avem: $\cos(\pi - x) = -\cos x, \forall x \in R$ $\Rightarrow \cos 130^0 + \cos 50^0 = 0$.	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 puncte)**

5p	**1.a)** $A(1) = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ $\det A(1) = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 4\cdot(-1) - 6\cdot(-1) = 2$	**2p** **3p**
5p	**b)** $A(x)\cdot A(-x) = \begin{pmatrix} 1-3x^2 & -6x^2 \\ x^2 & 1+2x^2 \end{pmatrix}$ $\det(A(x)\cdot A(-x)) = 1 - x^2$ $1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x \in [-1, 1]$	**2p** **2p** **1p**
5p	**c)** $A(m)\cdot A(n) = A(mn+m+n)$ $A(mn+m+n) = A(2) \Rightarrow mn+m+n = 2$, de unde $(m+1)(n+1) = 3$ Cum $m, n \in \mathbb{N}$, se obține $(m,n) \in \{(2,0),(0,2)\}$	**2p** **2p** **1p**
5p	**2. a)** $0 \circ (-2) = 0\cdot(-2) + 2\cdot 0 + 2\cdot(-2) + 2 = -4 + 2 = -2$	**5p**
5p	**b)** $x \circ y = x(y+2) + 2(y+2) - 2 = (x+2)(y+2) - 2$.	**5p**
5p	**c)** Din b) $\Rightarrow x \circ x = (x+2)^2 - 2$; $x \circ x \circ x = [(x+2)^2 - 2 + 2](x+2) - 2 = (x+2)^3 - 2$. Deci, $(x+2)^3 - 2 = 6 \Rightarrow (x+2)^3 = 8 \Rightarrow x+2 = 2 \Rightarrow x = 0$.	**1p** **2p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 puncte)**

5p	**1. a)** $f'(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+\frac{x}{(x+1)^2}\cdot\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ Finalizare, $f'(x)=\frac{x^2+x-1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}},\ x\in(1,+\infty)$	**3p** **2p**
5p	**b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, deci graficul funcției f nu are asimptotă orizontală spre $+\infty$ $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=1$, $n=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-1\right)=-1$ $y=x-1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**1p** **1p** **2p** **1p**
5p	**c)** $f'(x)=0\Leftrightarrow x^2+x-1=0$ cu soluțiile $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\notin[1,+\infty)$ și $f'(x)>0,\forall x>1$ Deci, f este strict crescătoare pe $(1,+\infty)$, dar fiind continuă, f este strict crescătoare pe $[1,+\infty)$ Cum f(1) = 0 și $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, iar f este continuă pe $[1,+\infty)$ rezultă că $\operatorname{Im} f=[0,+\infty)$	**2p** **2p** **1p**
5p	**2. a)** $\int g(x)dx=\int x\left(e^x\right)'dx=$ $=xe^x-\int e^x dx=$ $=xe^x-e^x+C$	**2p** **2p** **1p**
5p	**b)** Cum *g* este derivabilă și $g'(x)=f(x)$ avem că *g* este o primitivă a funcției *f*	**5p**
5p	**c)** $\int f(x)g(x)dx=\int g'(x)g(x)dx=$ $=\frac{g^2(x)}{2}+C=\frac{x^2e^{2x}}{2}+C$	**2p** **3p**

Coordonator grup de lucru – M_ șt-nat:

- Bălănescu Daniela, inspector şcolar pentru matematică

Grup de lucru – Varianta 2 – M_șt-nat:

- Goga Georgiana, Colegiul Național *Mihai Eminescu* Constanța
- Gurgui Adriana, Liceul Teoretic *Ovidius* Constanța
- Zîrnă Luiza, Colegiul Național *Mihai Eminescu* Constanța

Bibliografie:

1. Zanoschi A., Iurea Ghe., Bacalaureat 2021: matematica - M_mate-info, Editura Paralela 45, Pitesti 2020
2. Andronache M., Serbanescu D., Matematica pentru examenul de bacalaureat, M1, Editura Art, Clubul matematicienilor, 2015