Simulare județeană - Examenul național de bacalaureat, Ianuarie 2022
Proba E.c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profil militar, specializarea matematică-informatică

SUBIECTUL I **(30 puncte)**

5p **1.** Fie progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$. Știind că $b_2+b_5=156$ și $b_3+b_6=468$, calculați rația progresiei.

5p **2.** Determinați valoarea numărului real m știind că vârful parabolei $y=2x^2-4x+1$ se află pe dreapta de ecuație $y=(m-2)x-3$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^{x-1}-2^{x+1}+3=0$.

5p **4.** Fie mulțimea $A=\{-2,-1,0,1,2\}$. Să se determine numărul funcțiilor impare $f:A\to A$.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC, M mijlocul laturii BC și punctul T mijlocul segmentului AM. Să se arate că $\overline{BT}=\frac{1}{4}\overline{AC}-\frac{3}{4}\overline{AB}$.

5p **6.** Fie $\alpha\in\mathbf{R}$ cu proprietatea $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{8}$. Calculați $\sin 2\alpha$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 puncte)**

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\a&b&c\\bc&ac&ab\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+y+z=0\\ax+by+cz=0\\bcx+acy+abz=0\end{cases}$, $a,b,c\in\mathbf{R}^*$.

5p **a)** Să se arate că $\det A=(a-b)(a-c)(c-b)$.

5p **b)** Rezolvati sistemul știind că a, b, c sunt disticte două câte două.

5p **c)** Pentru $a=b\neq c$ determinați soluția (x_0,y_0,z_0) a sistemului pentru care $x_0^2+y_0^2+z_0^2-18=0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=3xy-6x-6y+14$.

5p **a)** Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația $x*(2-3x)=2$.

5p **b)** Calculați $\frac{1}{21}*\frac{2}{21}*\frac{3}{21}*...*\frac{2022}{21}$.

5p **c)** Determinați numerele naturale a, b, c care verifică relația $a*b*c=65$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$

5p **a)** Să se arate că $x^2\cdot f'(x)=\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)$, $\forall x\in(0,+\infty)$

5p **b)** Să se arate că graficul funcției admite o singură asimptotă.

5p **c)** Determinați cel mai mic număr întreg a pentru care $f(x)<a$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=e^x\cdot(2x^2+3x+4)$ și $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $F(x)=e^x\cdot(ax^2+bx+c)$

5p **a)** Să se determine $a,b,c\in\mathbf{R}$ astfel încât funcția F să fie primitiva funcției f.

5p **b)** Aflați primitiva funcției f, al cărei grafic conține punctul A(0;2).

5p **c)** Arătați că orice primitivă a funcției f este convexă pe $\mathbf{R}$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E.c)
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare și de notare

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profil militar, specializarea matematică-informatică

SUBIECTUL I **(30 puncte)**

5p	**1.** $b_2 = b_1 q,\ b_3 = b_1 q^2,\ b_5 = b_1 q^4,\ b_6 = b_1 q^5,$ $b_1 q\left(1+q^3\right) = 156,\ \ b_1 q^2\left(1+q^3\right) = 468$ $q = 3$	**1p** **2p** **2p**
5p	**2.** $x_V = -\dfrac{b}{2a} = 1,\ y_V = -\dfrac{\Delta}{4a} = -1$ $V \in d \Leftrightarrow y_V = (m-2)x_V - 3$ $m = 4 \in \mathbf{R}$	**2p** **2p** **1p**
5p	**3.** $\dfrac{4^x}{4} - 2\cdot 2^x + 3 = 0$ $2^x = t, t > 0 \Rightarrow t^2 - 8t + 12 = 0$ $t_1 = 2 \Rightarrow x = 1$ $t_2 = 6 \Rightarrow x = \log_2 6$	**1p** **2p** **1p** **1p**
5p	**4.** Funcția f impară $\Leftrightarrow$ $f(-2) = -f(2)$, $f(-1) = -f(1)$ și $f(0) = -f(0)$ de unde $f(0) = 0$. Astfel vom avea $5\cdot 5\cdot 1 = 25$ de funcții.	**2p** **3p**
5p	**5.** $\overrightarrow{BT} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM}\right)$. Cum $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BM} \Rightarrow \overrightarrow{BT} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{BT} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) \Rightarrow \overrightarrow{BT} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}$	**3p** **2p**
5p	**6.** $\sin\alpha\cos\dfrac{\pi}{4} - \cos\alpha\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{8} \Rightarrow \sin\alpha - \cos\alpha = \dfrac{1}{4}$ Prin ridicare la pătrat obținem $1 - 2\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{1}{16} \Rightarrow \sin 2\alpha = \dfrac{15}{16}$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 puncte)**

5p	**1.a)** $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ac & ab \end{vmatrix} \underset{C_3 - C_1}{\overset{C_2 - C_1}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ bc & c(a-b) & b(a-c) \end{vmatrix} =$ $= (a-b)(a-c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & -1 & -1 \\ bc & c & b \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ c & b \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(c-b)$	**2p** **3p**
5p	**b)** $a \ne b,\ b \ne c, a \ne c \Rightarrow (a-b)(a-c)(c-b) \ne 0 \Rightarrow \det A \ne 0$ $\det A \ne 0 \Rightarrow$ sistemul este compatibil determinat Cum sistemul este omogen, soluția este (0,0,0)	**2p** **1p** **2p**
5p	**c)** $a = b \ne c \Rightarrow \det A = 0$ Sistemul este omogen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & c \\ ac & ac & a^2 \end{pmatrix} \Rightarrow d_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & c \end{vmatrix} = c - a \ne 0 \Rightarrow$ sistem compatibil nedeterminat	**1p**

	$x=\alpha\in\mathbf{R}\Rightarrow\begin{cases}y+z=-\alpha\\ ay+cz=-a\alpha\end{cases}\Rightarrow y=-\alpha$ și $z=0$ $x_0^2+y_0^2+z_0^2-18=0\ \Rightarrow 2\alpha^2=18\Rightarrow\alpha_1=3,\alpha_2=-3$ $(x_0,y_0,z_0)\in\{(3,-3,0),(-3,3,0)\}$	3p 1p
5p	**2. a)** $x*y=3(x-2)(y-2)+2\Rightarrow x*(2-3x)=3(x-2)(-3x)+2$ $3(x-2)(-3x)+2=2\Rightarrow x_1=2,\ x_2=0$	2p 3p
5p	**b)** $x*y=3(x-2)(y-2)+2\Rightarrow x*2=2*x=2,\forall x\in\mathbf{R}$ $\frac{1}{21}*\frac{2}{21}*...*\frac{42}{21}*...*\frac{2022}{21}\overset{lege\ asoc}{=}$ $\underbrace{\left(\frac{1}{21}*\frac{2}{21}*...*\frac{41}{21}\right)}_{A}*\frac{42}{21}*\underbrace{\left(\frac{43}{21}*...*\frac{2022}{21}\right)}_{B}=A*2*B\overset{lege\ asoc}{=}(A*2)*B=2*B=2$	2p 1p 2p
5p	**c)** $a*b*c=9(a-2)(b-2)(c-2)+2$ $9(a-2)(b-2)(c-2)+2=65\Rightarrow(a-2)(b-2)(c-2)=7\Rightarrow$ $(a-2,b-2,c-2)\in\{(1,1,7),(1,7,1),(7,1,1),(-1,-1,7),(-1,7,-1),(7,-1,-1)\}$ $(a,b,c)\in\{(3,3,9),(3,9,3),(9,3,3),(1,1,9),(1,9,1),(9,1,1)\}$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea **(30 puncte)**

5p	**1.a)** $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x+1}\cdot x-\ln(x+1)}{x^2}$ $\Rightarrow x^2\cdot f'(x)=\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)$	3p 2p
5p	**b)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>o}}\frac{\ln(1+x)}{x}=1\Rightarrow$ funcția nu admite asimptotă verticală. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0$ $\Rightarrow y=0$ asimptotă orizontală la $+\infty$. Graficul funcției admite o singura asimptotă	2p 2p 1
5p	**c)** $f'(x)=\frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)\right)$ Cum $\frac{1}{x^2}>0,\forall x\in(0,+\infty)$, semnul derivatei este dat de semnul funcției $g(x)=\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)$, $g:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$. $g'(x)=-\frac{x}{(x+1)^2}<0,\forall x\in(0,+\infty)$ $\Rightarrow g$ este strict descrescătoare pe $(0,+\infty)\Rightarrow g(x)<\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>o}}g(x)=0\ \Rightarrow f'(x)<0,\ \forall x\in(0,+\infty)$ $\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(0,+\infty)$. Cum $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ și $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>o}}f(x)=1\Rightarrow f(x)\in(0,1)\Rightarrow a=1$	2p 1p 2p
5p	**2. a)** F derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $F'(x)=f(x)$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$ $e^x\cdot\left[ax^2+(2a+b)x+(b+c)\right]=e^x\cdot(2x^2+3x+4)$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$ Rezultă: $\begin{cases}a=2\\ 2a+b=3\\ b+c=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\in\mathbb{R}\\ b=-1\in\mathbb{R}\\ c=5\in\mathbb{R}\end{cases}$.	1p 2p 2p

5p	**b)** Din a) $F(x)=e^x\cdot\left(2x^2-x+5\right)+c,\ c\in\mathbb{R}$ este o primitivă oarecare a lui *f*	**2p**
	$A(0,2)\in G_F\Rightarrow F(0)=2\Rightarrow 5+c=2\Rightarrow c=-3\in\mathbb{R}$	**2p**
	$F(x)=e^x\cdot\left(2x^2-x+5\right)-3,\ (\forall)\,x\in\mathbb{R}$	**1p**
5p	**c)** Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă oarecare a lui *f*. *F* convexă pe $\mathbb{R}\Leftrightarrow F''(x)>0,(\forall)\,x\in\mathbb{R}$	**1p**
	$F''(x)=(F'(x))'=f'(x)=e^x\cdot\left(2x^2+3x+4\right)+e^x(4x+3)=e^x\cdot\left(2x^2+7x+7\right),(\forall)\,x\in\mathbb{R}$	**2p**
	Deorece $e^x>0,\ (\forall)\,x\in\mathbb{R}$ și $2x^2+7x+7>0(\forall)\,x\in\mathbb{R}$ pentru că $\Delta<0$ rezultă $F''(x)>0,(\forall)\,x\in\mathbb{R}$. În consecință, F convexă pe $\mathbb{R}$.	**2p**

Coordonator grup de lucru – M_mate-info:

- Bălănescu Daniela, inspector școlar pentru matematică

Grup de lucru – Varianta 2 – M_mate-info:

- Dermengiu Alina, Colegiul Național *Mircea cel Bătrân* Constanța
- Gache Florian, Colegiul Național *Mircea cel Bătrân* Constanța
- Ghiță Marius, Liceul Teoretic *Traian* Constanța

Bibliografie – Matematică – M_mate-info

1. M. Andronache, D. Șerbănescu, M. Perianu, C. Ciupală, F. Dumitrel – *Matematică pentru examenul de bacalaureat – matematică-informatică*, Ed. Art Educațional, București, 2017.

2. M. Ganga – *Elemente de analiză matematică pentru clasa a XII-a*, Ed. Mathpress, Ploiești, 2000.

3. T Cohal, Gh. Iurea - *Probleme de matematică pentru clasa a XI-a ,* Ed. Paralela 45, 2012

4. A. Zanoschi, Gh. Iurea, G.Popa, P. Răducanu, I. Şerdean - *Bacalaureat 2016– matematică, M_mate-info,* Ed. Paralela 45, 2015