

C.N.V.V.Curtea de Argeș

Olimpiada de Matematică 2022 Faza pe școală

Clasa a XII - a

SUBIECTE :

a) Pe mulțimea  $G = (3, \infty)$  se definește legea de compoziție  $x * y = xy - 3x - 3y + 12$  asociativă .

1. Elementul neutru este a) 4 b) 5 c) 6 d) 8 e) -2
2. Simetricul lui 5 este a) -5 b) -6 c) 3,5 d) 4 e) 4,5
3. Calculul  $1 * 2 * 3 * \dots * 15$  dă rezultatul a) 3 b) 5 c) 7 d) 9 e) -3

b) Fie  $G = \left\{ X(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & a+a^2 \\ 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in R \right\}$  cu operația de înmulțire a matricelor.

4. Element neutru este a)  $X(1)$  b)  $X(0)$  c)  $X(-1)$  d)  $X(-2)$  e)  $X(-3)$
5.  $X(7) \cdot X(8)$  este egal cu a)  $X(15)$  b)  $X(12)$  c)  $X(14)$  d)  $X(56)$  e)  $X(20)$
6. Simetricul lui  $X(4)$  este a)  $X(1)$  b)  $X(2)$  c)  $X(3)$  d)  $X(-4)$  e)  $X(-3)$

7. Fie  $G$  un grup comutativ cu 10 elemente , cu elementul neutru  $e$ . Atunci pentru orice element  $x \in G$  avem a)  $x^9 = e$  b)  $x^{10} = e$  c)  $x^{11} = e$  d)  $x^{-2} = e$  e)  $x^{-1} = e$

8. Grupul  $G$  are subgrupurile  $A$  și  $B$ . Atunci a)  $A \cup B$  este subgrup b)  $A \cap B$  este subgrup c)  $A \cup B = G$  d)  $A \cap B = \phi$  e)  $A - B = \phi$

9. Pe  $R$  se definesc  $x \circ y = x + y + 1$ ,  $x * y = x + y - 1$ . Atunci  $(R, \circ)$  și  $(R, *)$

- a) nu sunt grupuri b) nu sunt monoizi c) nu au element neutru d) au elemente neinversabile e) sunt grupuri izomorfe

10. O primitivă a funcției  $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow R \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$  este a)  $-2\text{tg}2x$  b)  $-2\text{ctg}2x$  c)  $\text{tg}x$

d)  $\text{ctg}3x$  m e)  $2\sin x$

11.  $I_n = \int \ln^n x dx$ ,  $x \in (0, \infty)$ . Atunci a)  $I_3 = x \ln^4 x$  b)  $I_4 = x \ln^5 x$  c)  $I_5 = x \ln^5 x - 5I_4$  d)  $I_2 = I_3$  e)  $I_6 = I_8$

12.  $\int \frac{3^x}{\sqrt{1-9^x}} dx$  este a)  $\arcsin 3^x$  b)  $\arcsin 9^x$  c)  $\frac{1}{\ln 3} \arcsin 3^x + C$  d)  $\frac{1}{\ln 2} \arccos x$

e)  $\frac{1}{\ln 2} \arcsin x + C$

13.  $\int_0^4 (x+2)e^{-x} dx$  este egală cu a) 3 b) -7 c)  $-7e^{-4}$  d)  $3-7e^{-4}$  e) 21

14.  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{\cos 2x}} dx$  este egală cu a)  $\arcsin 3$  b)  $\arcsin (-3)$  c)  $\frac{1}{3}$  d)  $-\frac{1}{3}$  e)  $\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{3}$

15.  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{e^x + 1} dx$  este egală cu a)  $\frac{2}{3}$  b) 0 c) 1 d) -2 e) -1

## BAREM

1. a)
2. c)
3. a)
4. b)
5. a)
6. d)
7. b)
8. b)
9. e)
10. b)
11. c)
12. c)
13. d)
14. e)
15. a)

XII

a) 1.  $x * e = x, \forall x \in G \Rightarrow x e - 3x - 3e + 12 = x \Rightarrow$   
 $\Rightarrow e(x-3) = 4x-12 \Leftrightarrow e=4$  (a)

---

2.  $x * x' = 4 \Rightarrow x x' - 3x - 3x' + 12 = 4$   
 $x'(x-3) = 3x-8 \Rightarrow x' = \frac{3x-8}{x-3}$   
 $x=5 \Rightarrow x' = \frac{7}{2} = 3,5$  (c)

---

3.  $x = e$  element observand  
 $1 * 2 * \dots * 15 = 3$  (a)

---

b) 4. Element neutru este  $X(0) = I_3$  (b)

---

5.  $X(a) \cdot X(b) = X(a+b)$   
 $X(7) \cdot X(8) = X(15)$  (a)

---

6.  $X(a)^{-1} = X(-a)$   
 $X(4)^{-1} = X(-4)$  (d)

---

7.  $x^m = e \Rightarrow x^{10} = e$  (b)

---

8.  $A \cap B$  Subgrup d  $G$  (b)

---

9. Grupuri izomorfe (e)

$$10. \int \left( \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \frac{1}{\tan x} - \cot x + C = -2 \cot 2x + C$$

(b)

---

$$11. I_n = x \cdot \ln^n x - n I_{n-1}$$
$$n=5 \quad x \ln^5 x - 5 I_4 \quad (c)$$

---

$$12. 3^x = t \Rightarrow 3^x \cdot \ln 3 dx = dt$$
$$\frac{1}{\ln 3} \arcsin 3^x + C \quad (c)$$

---

13. Partielle

$$\int_0^4 (x+2)(-e^{-x})' dx = 3 - 7 \cdot e^{-4} \quad (d)$$

---

$$14. \tan x = t \Rightarrow x = \arctan t \Rightarrow dx = \frac{1}{t^2+1} dt$$
$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt = \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{3} \quad (e)$$

---

$$15. t = -x \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x (1 - \sin^2 x) dx$$
$$\sin x = t \Rightarrow I = \frac{2}{3} a)$$