

Examenul național de bacalaureat 2022 – simulare județeană
Proba E. c)
Matematică M_șt-nat

Filiera teoretică: profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore

SUBIECTUL I**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Arătați că numărul complex $z = \frac{-1+i}{2}$ este soluție a ecuației $2z^2 + 2z + 1 = 0$ ($i^2 = -1$).
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - ax + 2$. Determinați numerele reale a și b pentru care dreapta $y = b$ intersectează graficul funcției în două puncte cu abscisele 0, respectiv 3.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $\sqrt{x+5} - \sqrt{5-x} = 2$.
- 5p** 4. Determinați numărul de triplete (a, b, c) cu $a, b, c \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$, $a < b < c$ pentru care a , b și c sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
- 5p** 5. Se consideră vectorii $\vec{u} = (a-2) \cdot \vec{i} + a \cdot \vec{j}$ și $\vec{v} = -3 \cdot \vec{i} + (a+2) \cdot \vec{j}$, $a \in \mathbb{R}$. Determinați numărul real a pentru care vectorii sunt coliniari.
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC cu $BC=10$, $AB=8$ și $AC=6$. Arătați că $\sin B \cdot \cos B = \sin C \cdot \cos C$.

SUBIECTUL al II-lea**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B(x) = I_2 + xA$ pentru orice număr real x .
- 5p** a) Arătați că $\det(B(-1)) + \det A = 0$.
- 5p** b) Arătați că $B(a) \cdot B(b) = B(a+b+ab)$ pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.
- 5p** c) Determinați matricea $X \in M_2(\mathbb{R})$ pentru care $B(16) \cdot X \cdot B(16) = B(2022)$.
2. Pe mulțimea \mathbb{R}^* se definește legea de compoziție $x \circ y = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 1$.
- 5p** a) Arătați că $x \circ y \in [1, \infty)$ pentru orice $x, y \in [1, \infty)$.
- 5p** b) Determinați numerele reale x pentru care $2^{x+1} \circ 3^x \leq 2^x \circ 3^{x+1}$.
- 5p** c) Arătați că $1 \circ 2 + 2 \circ 3 + 3 \circ 4 + \dots + 2021 \circ 2022 < 2022$.

SUBIECTUL al III-lea**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} - \{\pm 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$.
- 5p** b) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f .
- 5p** c) Determinați ecuațiile tangentelor la graficul funcției paralele cu dreapta $x + y = 0$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2x$.

5p

a) Arătați că $\int_0^1 (f(x) + 2f(\sqrt{x})) dx = -\frac{7}{3}$.

5p

b) Determinați numărul real a pentru care $\int_1^2 \frac{2}{2+f(x)} dx = a \int_3^5 \frac{1}{1+f(x)} dx$.

5p

c) Se consideră $g : (2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{x-1}{f(x)}$ și $G : (2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o primitivă a lui g cu proprietatea $G(4) = 0$. Arătați că $\int_4^6 G(x)f'(x)dx = 8(3 \cdot G(6) - 1)$.