Simulare județeană - Examenul național de bacalaureat, Ianuarie 2022
Proba E.c)
Matematică *M_șt-nat*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timp de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 puncte)

5p **1.** Calculați suma primilor 10 termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ știind că $a_1 = 6$ și $a_2 = 12$.

5p **2.** Se consideră funcția $f : R \to R$, $f(x) = x^2 - x - 5$. Arătați că $(f \circ f)(\sqrt{5}) = \sqrt{5}$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\left(\sqrt{3}\right)^{4+x-x^2} = \sqrt[3]{27}$.

5p **4.** Aflați $n \in N^*$ pentru care mulțimea $A = \{1,2,3,...,n\}$ are 56 de submulțimi cu exact trei elemente.

5p **5.** Fie vectorii $\vec{u} = m \cdot \vec{i} + (m+1) \cdot \vec{j}$ și $\vec{v} = 2 \cdot \vec{i} + (m+3)\vec{j}$. Să se determine $m > 0$ astfel încât vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ să fie coliniari.

5p **6.** Știind că $\frac{a}{2} \in (0, \frac{\pi}{2})$ și $\cos\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{10}}{10}$, calculați $\cos a$.

SUBIECTUL al II-lea (30 puncte)

1. Pentru fiecare $m \in R$, se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații

$$\begin{cases} x + y + m \cdot z = 1 \\ x + m \cdot y + z = 1 \\ m \cdot x + y + z = 1 \end{cases}.$$

5p **a)** Să se arate că $\det A(m) = -(m-1)^2 \cdot (m+2)$, $m \in R$.

5p **b)** Să se determine $m \in R$ pentru care sistemul dat are soluție unică.

5p **c)** Pentru $m = 0$, rezolvați sistemul .

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x * y = x \cdot y - 5 \cdot (x + y) + 30$

5p **a)** Să se arate că $x * y = (x-5) \cdot (y-5) + 5$, $\forall x, y \in R$

5p **b)** Să se arate că legea "*" este asociativă pe R.

5p **c)** Să se calculeze $1 * 2 * 3 * .... * 2021$

SUBIECTUL al III-lea (30 puncte)

1. Se consideră funcția $f : R \to R$, $f(x) = \left(x^2 - 5 \cdot x - 5\right) \cdot e^x$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in R$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Să se arate că tangenta la graficul funcției f, dusă în punctul de coordonate $\left(-2; f(-2)\right)$ este paralelă cu axa Ox.

2. Se consideră funcția $f : (0,\infty) \to R$, $f(x) = x^2 \cdot \ln x$.

5p **a)** Determinați mulțimea primitivelor funcției f pe intervalul $(0,\infty)$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to 1} \frac{F(x)}{x-1}$, unde F este o primitivă pe intervalul $(0,\infty)$ pentru care $F(1) = 0$.

5p **c)** Stabiliți intervalele de monotonie ale funcției F de la subpunctul b).

Simulare județeană - Examenul național de bacalaureat, Ianuarie 2022
Proba E.c)
Matematică *M_șt-nat*
Barem de evaluare și de notare

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat de barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 puncte)**

5p	**1.** $r = a_2 - a_1 = 12 - 6 = 6$	**2p**
	$S_{10} = \frac{10 \cdot (2 \cdot a_1 + 9 \cdot r)}{2} = 5 \cdot (2 \cdot 6 + 9 \cdot 6) = 330$.	**3p**
5p	**2.** $f(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^2 - \sqrt{5} - 5 = -\sqrt{5}$.	**2p**
	$(f \circ f)(\sqrt{5}) = f(f(\sqrt{5})) = f(-\sqrt{5}) = (-\sqrt{5})^2 - (-\sqrt{5}) - 5 = 5 + \sqrt{5} - 5 = \sqrt{5}$	**3p**
5p	**3.** $\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{4+x-x^2} = 3^1 \Rightarrow 3^{\frac{4+x-x^2}{2}} = 3^1 \Rightarrow \frac{4 + x - x^2}{2} = 1$	**3p**
	$\Rightarrow 4 + x - x^2 = 2 \Rightarrow -x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow x \in \{-1; 2\}$	**2p**
5p	**4.** $C_n^3 = 56$, $n \geq 3$	**3p**
	$n(n-1)(n-2) = 336 \Rightarrow n = 8$	**2p**
5p	**5.** $\frac{m}{2} = \frac{m+1}{m+3}$	**3p**
	$m^2 + m - 2 = 0$, $m > 0$, deci $m = 1$	**2p**
5p	**6.** $\cos a = 2\cos^2 \frac{a}{2} - 1$	**3p**
	$\cos a = -\frac{4}{5}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 puncte)**

5p	**1.a)** $\det A(m) = m + m + m - m^3 - 1 - 1 = -m^3 + 3m - 2 = -(m-1)^2 \cdot (m+2)$	**5p**
5p	**b)** Sistemul are soluție unică $\Leftrightarrow \det A(m) \neq 0$	**2p**
	$-(m-1)^2 \cdot (m+2) \neq 0 \Rightarrow m \neq 1$ și $m \neq -2$.	**3p**
5p	**c)** $m = 0 \Rightarrow \det A(0) = -2 \neq 0 \Rightarrow$ sistemul are soluție unică $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$, $z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$	**1p**
	$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$; $\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$; $\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$	**3p**

	$x=\frac{1}{2};\ \ y=\frac{1}{2};\ z=\frac{1}{2}.$	**1p**
5p	**2. a)** $x*y=xy-5x-5y+30=xy-5x-5y+25+5=$ $=x\cdot(y-5)-5\cdot(y-5)+5=(x-5)\cdot(y-5)+5,\ \forall x,y\in R$	**2p** **3p**
5p	**b)** $(x*y)*z=x*(y*z),\ \forall x,y,z\in R$ $(x*y)*z=((x-5)(y-5)+5)*z=$ $=((x-5)(y-5)+5-5)(z-5)+5=(x-5)(y-5)(z-5)+5,\ \forall x,y,z\in R$ $x*(y*z)=x*((y-5)(z-5)+5)=$ $=(x-5)((y-5)(z-5)+5-5)+5=(x-5)(y-5)(z-5)+5,\ \forall x,y,z\in R$	**1p** **2p** **2p**
5p	**c)** $x*5=5*x=5,\ \forall x\in R$ și cum legea "*" este asociativă, atunci: $1*2*3*....*2001=\underbrace{(1*...*4)}_{a}*5*\underbrace{(6*...*2021)}_{b}=a*5*b=(a*5)*b=5*b=5$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 puncte)**

5p	**1. a)** $f'(x)=(x^2-5x-5)'\cdot e^x+(x^2-5x-5)\cdot(e^x)'=(2x-5)\cdot e^x+(x^2-5x-5)\cdot e^x=$ $=e^x\cdot(x^2-3x-10)$	**3p** **2p**
5p	**b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-5x-5)\cdot e^x\overset{\infty\cdot 0}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-5x-5}{e^{-x}}\underset{l'H}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x-5}{-e^{-x}}\underset{l'H}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}}=0\in R$ $\Rightarrow y=0$ asimptotă orizontală spre $-\infty$	**3p** **2p**
5p	**c)** Cerința este echivalentă cu a arăta că panta tangentei la grafic în punctul $x_0=-2$ este 0, adică $f'(-2)=0$. Din a) $\Rightarrow f'(x)=e^x\cdot(x^2-3x-10)\Rightarrow f'(-2)=e^{-2}\cdot(4-3\cdot(-2)-10)=0$	**3p** **2p**
5p	**2. a)** $\int x^2\cdot\ln x dx=\int\left(\frac{x^3}{3}\right)'\cdot\ln x dx=\frac{x^3}{3}\cdot\ln x-\int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx=$ $=\frac{x^3}{3}\cdot\ln x-\frac{1}{3}\cdot\int x^2 dx=\frac{x^3}{3}\cdot\ln x-\frac{x^3}{9}+C$	**3p** **2p**
5p	**b)** $\lim\limits_{x\to1}\frac{F(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}=F'(1)=$ $=f(1)=1^2\cdot\ln 1=0$	**3p** **2p**
5p	**c)** $F'(x)=f(x),\ \forall x\in(0,\infty)$ $F'(x)=0\Rightarrow x^2\cdot\ln x=0\Rightarrow x=1\in(0,\infty)$ $F'(x)<0,\forall x\in(0,1)\Rightarrow F$ este strict descrescătoare pe $(0,1)$ și $F'(x)>0,\forall x\in(1,\infty)\Rightarrow F$ este strict crescătoare pe $(1,\infty)$; $x_0=1$ punct de minim.	**2p** **3p**