Simulare pentru EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2022

Probă scrisă la matematică **Varianta 1**

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Aflați suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_2 = 674$.

5p **2.** Calculați distanța dintre punctele de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x-2$ cu axele de coordonate Ox și Oy.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2 x-\log_{\frac{1}{2}}(x-2)=3$.

5p **4.** Aflați probabilitatea ca un element n al mulțimii $M=\{0,1,2,3,4,5\}$ să verifice inegalitatea $2^n>n^2$.

5p **5.** Determinați valorile parametrului real $m$pentru care dreptele având ecuațiile $d_1: mx+2y-5=0$ și $d_2:(m-1)x+y+3=0$ sunt concurente.

5p **6.** Dacă $E(x)=\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{4x}{3}, x\in\mathbb{R}$, calculați $E\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & 7\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că determinantul matricei A este egal cu -1.

5p **b)** Aflați $m\in\mathbb{R}$ pentru care $A\cdot A-m\cdot A=I_2$.

5p **c)** Dacă x și $y$sunt numere reale distincte astfel încât $\det(A-x\cdot I_2)=\det(A-y\cdot I_2)$, demonstrați că $x+y=9$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\perp y=x+y+3xy$.

5p **a)** Arătați că $\left(-\frac{1}{3}\right)\perp 2022=-\frac{1}{3}$.

5p **b)** Determinați numerele reale x care coincid cu simetricele lor în raport cu legea „$\perp$”.

5p **c)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x+1$. Demonstrați că $f(x\perp y\perp z)=f(x)\cdot f(y)\cdot f(z)$, oricare ar fi numerele reale x, y și z.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x}{1+x+x^2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{(1-x)(1+x)}{\left(1+x+x^2\right)^2}$, oricare ar fi numărul real *x*.

5p **b)** Determinați coordonatele punctelor situate pe graficul funcției *f* cu proprietatea că tangentele în aceste puncte la graficul funcției *f* sunt drepte perpendiculare pe axa *Oy*.

5p **c)** Demonstrați că $f\left(\sqrt{2}\right)\geq f\left(\sqrt[3]{3}\right)$.

2. Se consideră funcția $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$.

5p **a)** Calculați $\int_1^2 f\left(e^x\right)dx$.

5p **b**) Determinați primitiva $F:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției *f* cu proprietatea că $F(1)=0$, folosind, eventual, faptul că funcția *F* este de forma $F(x)=(ax+b)\cdot\ln x-cx+d$, unde $a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Demonstrați că orice primitivă a funcției *f* este convexă pe intervalul $[1,+\infty)$.

Simulare pentru EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2022
Probă scrisă la matematică **Varianta 1**

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_1+a_2+a_3=a_2+(a_1+a_3)=a_2+2a_2=3a_2$ $a_1+a_2+a_3=2022$	**3p** **2p**
2.	$G_f\cap Ox=\{A(2,0)\}, G_f\cap Oy=\{B(0,-2)\}$ $AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=2\sqrt{2}$	**2p** **3p**
3.	$\log_2 x-\log_{\frac{1}{2}}(x-2)=3\Rightarrow\log_2(x^2-2x)=3$ Obținem că $x^2-2x=8$, de unde $x=4$ și $x=-2$. Convine doar soluția $x=4$.	**2p** **2p** **1p**
4.	Sunt 6 cazuri posibile și 3 cazuri favorabile, deci probabilitatea evenimentului este $\frac{1}{2}$.	**2p** **2p** **1p**
5.	$m_{d_1}=-\frac{m}{2}$, $m_{d_2}=1-m$ Se impune condiția $1-m\neq-\frac{m}{2}$. Dreptele sunt concurente pentru $m\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$.	**2p** **2p** **1p**
6.	$E\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{2\pi}{3}$ $E\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=2\cdot7-3\cdot5$ $\det A=-1$	**2p** **3p**

b)	$A^2=\begin{pmatrix}19 & 27\\ 45 & 64\end{pmatrix}$ Ecuația matriceală revine la $\begin{pmatrix}2m & 3m\\ 5m & 7m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 27\\ 45 & 63\end{pmatrix}$, deci $m=9$.	**2p** **2p** **1p**
c)	$\begin{vmatrix}2-x & 3\\ 5 & 7-x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2-y & 3\\ 5 & 7-y\end{vmatrix}\Leftrightarrow x^2-9x=y^2-9y\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(x-y)(x+y-9)=0$ Cum numerele *x* și *y* sunt distincte, rezultă că $x+y=9$.	**2p** **2p** **1p**
2.a)	$\left(-\frac{1}{3}\right)\perp 2022=-\frac{1}{3}+2022+3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot 2022=$ $=-\frac{1}{3}+2022-2022=-\frac{1}{3}$	**2p** **3p**
b)	Elementul neutru este $e=0$. Din $x=x'$ și $x\perp x'=0$ rezultă că $2x+3x^2=0$, prin urmare $x\in\left\{0,-\frac{2}{3}\right\}$.	**2p** **1p** **2p**
c)	Se obține $f(x\perp y\perp z)=27\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(y+\frac{1}{3}\right)\left(z+\frac{1}{3}\right)$ (sau o formă echivalentă). Cum $f(x)\cdot f(y)\cdot f(z)=(3x+1)(3y+1)(3z+1)$, rezultă egalitatea cerută.	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{1+x+x^2-x\cdot(1+2x)}{\left(1+x+x^2\right)^2}=$ $=\frac{1-x^2}{\left(1+x+x^2\right)^2}=\frac{(1-x)(1+x)}{\left(1+x+x^2\right)^2}$	**3p** **2p**
b)	Tangenta la graficul funcției *f* în punctul de coordonate $(x_0,f(x_0))$ este perpendiculară pe axa *Oy* atunci când $f'(x_0)=0$. $f'(x_0)=0\Rightarrow x_0\in\{-1,1\}$ Punctele căutate sunt $A(-1,-1)$ și $B\left(1,\frac{1}{3}\right)$.	**1p** **2p** **2p**
c)	Funcția *f* este descrescătoare pe intervalul $(1,+\infty)$. Cum $1<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}\left(\Leftrightarrow 1^6<\left(\sqrt{2}\right)^6<\left(\sqrt[3]{3}\right)^6\Leftrightarrow 1<8<9\right)$, rezultă că $f\left(\sqrt{2}\right)>f\left(\sqrt[3]{3}\right)$.	**2p** **2p** **1p**

2.a)	$\int_1^2 f\left(e^x\right)dx=\int_1^2 x\,dx+\int_1^2 e^{-x}\,dx=$ $=\left.\frac{x^2}{2}\right\vert_1^2-\left.e^{-x}\right\vert_1^2=\frac{3e^2+2e-2}{2e^2}$	**2p** **3p**
b)	$F'(x)=a\ln x+\frac{x(a-c)+b}{x},\ x\in[1,+\infty)$ Cum $F'(x)=f(x),\forall x\in[1,+\infty)$, prin identificarea coeficienților obținem $a=1,b=1,c=1$. Din $F(1)=0$ deducem că $d=1$, deci primitiva căutată este $F:[0,\infty)\to\mathbb{R},F(x)=$ $=(x+1)\ln x-x+1$.	**2p** **1p** **2p**
c)	Dacă $G:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției *f*, atunci $G'(x)=f(x),\forall x\in[1,+\infty)$. Funcția *G* este convexă dacă și numai dacă $G''(x)\geq 0,\forall x\in[1,+\infty)$. Cum $G''(x)=\frac{x-1}{x^2}\geq 0,\forall x\in[1,+\infty)$, funcția *G* este convexă.	**1p** **2p** **2p**