Simulare pentru EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2022

Probă scrisă la matematică **Varianta 1**

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $\left(2-\sqrt{3}\right)^2-2\left(3-2\sqrt{3}\right)=1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+5x+4$. Determinați coordonatele punctului de intersecție dintre graficul funcției *f* și axa *Oy*.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{6-2x}=25$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 11.

5p **5.** În reperul cartezian *xOy* se consideră punctele $A(3,-5), B(1,1)$ și $C(-4,6)$. Determinați distanța de la punctul *C* la mijlocul segmentului *AB*.

5p **6.** Triunghiul *ABC* are măsura unghiului *A* de 60°, măsura unghiului *B* de 30° și $AC=6\sqrt{3}$. Determinați lungimea laturii *AB*.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} x-3 & 2 \\ -4 & x+3 \end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{R}$ și $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A(0)=-1$.

5p **b)** Demonstrați că $A(x)\cdot A(-x)=\left(1-x^2\right)\cdot I_2$, oricare ar fi numărul real *x*.

5p **c)** Determinați numărul real *a* cu proprietatea că

$$A\left(\frac{1}{2}\right)\cdot A\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot A\left(\frac{1}{3}\right)\cdot A\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot A\left(\frac{1}{4}\right)\cdot A\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot A\left(\frac{1}{5}\right)\cdot A\left(-\frac{1}{5}\right)=a\cdot I_2.$$

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=3xy+3x+3y+2$.

5p **a)** Arătați că $x*y=3(x+1)(y+1)-1$, pentru orice numere reale *x* și *y*.

5p **b)** Demonstrați că $e=-\frac{2}{3}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale pozitive ecuația $\left(\log_2 x\right)*\left(\log_3 x\right)=-1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x+\dfrac{1}{x+2}$

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}$, $x\in(-2,\infty)$.

5p **b)** Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției *f* în punctul de abscisă 0 situat pe graficul funcției *f*.

5p **c)** Demonstrați că ecuația $f(x)=2022$ are o exact două soluții reale.

2. Se consideră funcțiile $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x+\ln x-2$ și $F:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ F(x)=\dfrac{x^2}{2}-3x+x\ln x.$

5p **a)** Demonstrați că funcția *F* este o primitivă a funcției *f*.

5p **b)** Arătați că $\int_2^4 \left(f(x)-\ln x\right)dx=2$.

5p **c)** Demonstrați că orice primitivă a funcției *f* este funcție convexă pe $(0,\infty)$.

Simulare pentru EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2022

Probă scrisă la matematică **Varianta 1**

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(2-\sqrt{3}\right)^2=7-4\sqrt{3}$	**3p**
	$\left(2-\sqrt{3}\right)^2-2\left(3-2\sqrt{3}\right)=7-4\sqrt{3}-6+4\sqrt{3}=1$	**2p**
2.	Fie $\left\{A(a,b)\right\}=G_f\cap Oy$. Cum $A\in Oy$, rezultă că $a=0$.	**2p**
	Din $A\in G_f$ rezultă că $b=f(0)=4$, prin urmare punctul cerut este $A(0,4)$.	**3p**
3.	$5^{6-2x}=25\Leftrightarrow 6-2x=2$	**3p**
	$x=2$	**2p**
4.	Există 90 de numere naturale de două cifre,	**2p**
	dintre care 9 sunt divizibile cu 11 (11, 22, ..., 99).	**2p**
	Probabilitatea evenimentului din enunț este $\frac{9}{90}=\frac{1}{10}$.	**1p**
5.	Mijlocul segmentului *AB* este punctul $M(2,-2)$.	**2p**
	$CM=\sqrt{(2+4)^2+(-2-6)^2}=10$	**3p**
6.	$C=90^\circ$	**2p**
	$\sin B=\frac{AC}{AB}$	**1p**
	$\frac{1}{2}=\frac{6\sqrt{3}}{AB}\Rightarrow AB=12\sqrt{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -4 & 3\end{pmatrix}$	**2p**
	$\det A(0)=-3\cdot 3-2\cdot(-4)=-1$	**3p**

b)	$A(x)\cdot A(-x)=\begin{pmatrix}(x-3)(-x-3)+2\cdot(-4) & 2(x-3)+2(-x+3)\\ -4\cdot(-x-3)-4(x+3) & -4\cdot 2+(x+3)(-x+3)\end{pmatrix}=$	**2p**
	$=\begin{pmatrix}1-x^2 & 0\\ 0 & 1-x^2\end{pmatrix}=\left(1-x^2\right)\cdot I_2$	**3p**
c)	Ținând cont de b), membrul stâng este egal cu $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\cdot I_2$.	**2p**
	Atunci $a=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)=\frac{3}{5}$.	**3p**
2.a)	$3(x+1)(y+1)-1=3(xy+x+y+1)-1=$	**3p**
	$=3xy+3x+3y+2=x*y$, oricare ar fi numerele reale x și y	**2p**
b)	e este element neutru dacă $x*e=e*x=x$, oricare ar fi numărul real x	**2p**
	$x*\left(-\frac{2}{3}\right)=\left(-\frac{2}{3}\right)*x=-2x+3x-2+2=x$, oricare ar fi numărul real x	**3p**
c)	$(\log_2 x)*(\log_3 x)=-1 \Leftrightarrow (\log_2 x+1)(\log_3 x+1)=0$	**2p**
	Obținem că $\log_2 x=-1$ sau $\log_3 x=-1$,	**1p**
	de unde $x=\frac{1}{2}$ sau $x=\frac{1}{3}$, soluții care convin.	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=1-\frac{1}{(x+2)^2}=$	**3p**
	$=\frac{(x+2)^2-1}{(x+2)^2}=\frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2},\ x\in(-2,\infty)$	**2p**
b)	Punctul are coordonatele $\left(0,\frac{1}{2}\right)$	**1p**
	Panta tangentei este $f'(x_0)=\frac{3}{4}$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$	**2p**
c)	$f'(x)<0,\ \forall x\in(-2,-1)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe intervalul $(-2,-1)$, iar $f'(x)>0,\ \forall x\in(-1,+\infty)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe intervalul $(-1,+\infty)$	**2p**
	$\lim\limits_{x\searrow -2} f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty,\ f(-1)=0$	**2p**
	Cum $2022\in[0,+\infty)$, există și este unic $x_1\in(-2,-1)$ astfel încât $f(x_1)=2022$ și există și este unic $x_2\in(-1,+\infty)$ astfel încât $f(x_2)=2022$.	**1p**
	Notă. Ecuația $f(x)=2022$ este echivalentă cu $x^2-2020x-4043=0$. Soluțiile sale pot fi efectiv determinate (**3p**) și se verifică faptul că ambele aparțin domeniului funcției f (**2p**).	

2.a)	$F'(x)=x-3+1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=x+\ln x-2,\ x\in(0,+\infty)$	**3p**
	Funcția F este derivabilă și $F'(x)=f(x),\ x\in(0,+\infty)$, așadar F este o primitivă a lui f	**2p**
b)	$\int_2^4 (f(x)-\ln x)dx=\int_2^4 (x-2)dx=$	**2p**
	$=\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big\|_2^4=(8-8)-(2-4)=2$	**3p**
c)	Fie $G:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcției f; atunci $G'(x)=f(x),\forall x\in(0,+\infty)$.	**1p**
	$G''(x)=f'(x)=1+\frac{1}{x},\forall x\in(0,+\infty)$	**2p**
	Cum $G''(x)>0,\forall x\in(0,+\infty)$, rezultă că G este o funcție convexă.	**2p**