**Examenul național de bacalaureat 2022**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_mate-info***

**Model**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

## SUBIECTUL I (30 de puncte)

**5p** **1.** Arătați că numerele $6-3\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ și $2+\sqrt{3}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

**5p** **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+mx+1$, unde $m$ este număr real. Determinați numerele reale $m$ pentru care axa $Ox$ este tangentă graficului funcției $f$.

**5p** **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x+2}=5^x+24$.

**5p** **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre distincte, acesta să aibă cifra zecilor multiplu de $3$.

**5p** **5.** Se consideră triunghiul $ABC$, punctul $D$ mijlocul laturii $AC$ și punctul $M$ astfel încât $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. Arătați că dreptele $MD$ și $AB$ sunt paralele.

**5p** **6.** Calculați lungimea laturii $AB$ a triunghiului $ABC$, în care $AC=3$ și măsurile unghiurilor $A$ și $B$ sunt de $30°$, respectiv $60°$.

## SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

**1.** Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&i&0\\-2&0&-1\end{pmatrix}$ și $A(z)=aI_3+bB$, unde $z=a+ib$, cu $a$ și $b$ numere reale și $i^2=-1$.

**5p** **a)** Arătați că $\det B=i$.

**5p** **b)** Demonstrați că $A(z_1)\cdot A(z_2)=A(z_1z_2)$, pentru orice numere complexe $z_1$ și $z_2$.

**5p** **c)** Determinați numărul natural $n$ pentru care $A(1+i)\cdot A(2+i)\cdot A(3+i)\cdot A(1-i)\cdot A(2-i)\cdot A(3-i)=nI_3$.

**2.** Pe $M=[1,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\log_2\left(2^{x+y}-2^{x+1}-2^{y+1}+6\right)$.

**5p** **a)** Arătați că $x*y=\log_2\left(\left(2^x-2\right)\left(2^y-2\right)+2\right)$, pentru orice $x,y\in M$.

**5p** **b)** Determinați elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

**5p** **c)** Arătați că $x*x*x<3x$, pentru orice $x\in M$.

## SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^3+3x+1\right)e^{-x}$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=(2-x)\left(x^2-x+1\right)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)-e^{-x}}{f(x)+e^{-x}}\right)^{f(x)\cdot e^x}=e^{-2}$.

**5p** **c)** Demonstrați că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\left|\dfrac{f(x)}{e^{-x}}-1\right|$ are un singur punct de extrem.

**2.** Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln(x-1)$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_4^6 \frac{f(x)}{\ln(x-1)}dx=10$.

**5p** **b)** Demonstrați că $F(\sqrt{7})<F(3)$, pentru orice primitivă $F$ a funcției $f$.

**5p** **c)** Determinați numărul real $m$, știind că $\int_3^5 f(x)dx=m(4\ln 2-1)$.

**Examenul național de bacalaureat 2022**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_mate-info***

**BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE**

**Model**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $\left(6-3\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)=3\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)=3=$ | **3p** |
| | $=\left(\sqrt{3}\right)^2$, deci numerele $6-2\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ și $2+\sqrt{3}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice | **2p** |
| **2.** | Axa $Ox$ este tangentă graficului funcției $f \Leftrightarrow \Delta=0 \Leftrightarrow m^2-4=0$ | **3p** |
| | $m=-2$ sau $m=2$ | **2p** |
| **3.** | $25\cdot 5^x-5^x=24$, deci $5^x=1$ | **3p** |
| | $x=0$ | **2p** |
| **4.** | Mulțimea numerelor naturale de două cifre distincte are 81 de elemente, deci sunt 81 de cazuri posibile | **2p** |
| | În mulțimea numerelor naturale de două cifre distincte sunt $3\cdot 9=27$ de numere care au cifra zecilor multiplu de $3$, deci sunt $27$ de cazuri favorabile | **2p** |
| | $p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{1}{3}$ | **1p** |
| **5.** | $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0}$, deci $3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right)+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ și, cum $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MD}$, obținem $\overrightarrow{MD}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ | **3p** |
| | Vectorii $\overrightarrow{MD}$ și $\overrightarrow{AB}$ sunt coliniari, deci dreptele $MD$ și $AB$ sunt paralele | **2p** |
| **6.** | Unghiul $C$ are măsura egală cu $90°$, deci triunghiul $ABC$ este dreptunghic în $C$ | **2p** |
| | $\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ și, cum $AC=3$, obținem $AB=2\sqrt{3}$ | **3p** |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $\det B=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & i & 0\\ -2 & 0 & -1\end{vmatrix}=1\cdot i\cdot(-1)+0+0-(-2)\cdot i\cdot 1-0-0=$ | **3p** |
| | $=-i+2i=i$ | **2p** |
| **b)** | Cum $B\cdot B=-I_3$, $A(z_1)\cdot A(z_2)=(aI_3+bB)(cI_3+dB)=acI_3+adB+bcB+bdB\cdot B=$ | **3p** |
| | $=(ac-bd)I_3+(ad+bc)B=A(z_1z_2)$, pentru orice $z_1=a+ib$ și $z_2=c+id$, cu $a$, $b$, $c$ și $d$ numere reale | **2p** |
| **c)** | $A(1+i)\cdot A(2+i)\cdot A(3+i)\cdot A(1-i)\cdot A(2-i)\cdot A(3-i)=A\big((1+i)(2+i)(3+i)(1-i)(2-i)(3-i)\big)=$ | **2p** |
| | $=A\big((1+i)(1-i)(2+i)(2-i)(3+i)(3-i)\big)=A(2\cdot 5\cdot 10)=100I_3$, deci $n=100$ | **3p** |

| | | |
|---|---|---|
| **2.a)** | $x*y=\log_2\left(2^x\left(2^y-2\right)-2^{y+1}+4+2\right)=$ | **3p** |
| | $=\log_2\left(2^x\left(2^y-2\right)-2\left(2^y-2\right)+2\right)=\log_2\left(\left(2^x-2\right)\left(2^y-2\right)+2\right)$, pentru orice $x,y\in M$ | **2p** |
| **b)** | $x*e=x$ pentru orice $x\in M$, unde $e$ este elementul neutru al legii de compoziție, deci $\left(2^x-2\right)\left(2^e-3\right)=0$ pentru orice $x\in M$, de unde obținem $e=\log_2 3\in M$ | **3p** |
| | Cum $\left(\log_2 3\right)*x=x$ pentru orice $x\in M$, obținem că $e=\log_2 3$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$” | **2p** |
| **c)** | $x*x*x=\log_2\left(\left(2^x-2\right)^3+2\right)$, pentru orice $x\in M$ | **3p** |
| | $\left(x*x*x\right)-3x=\log_2\left(\dfrac{\left(2^x-2\right)^3+2}{2^{3x}}\right)=\log_2\left(1-\dfrac{6\left(2^x-1\right)^2}{2^{3x}}\right)<0$, pentru orice $x\in M$, de unde obținem că $x*x*x<3x$, pentru orice $x\in M$ | **2p** |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $f'(x)=\left(x^3+3x+1\right)'e^{-x}+\left(x^3+3x+1\right)\left(e^{-x}\right)'=\left(3x^2+3\right)e^{-x}-\left(x^3+3x+1\right)e^{-x}=$ | **3p** |
| | $=\left(-x^3+3x^2-3x+2\right)e^{-x}=\left(2-x\right)\left(x^2-x+1\right)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$ | **2p** |
| **b)** | $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)-e^{-x}}{f(x)+e^{-x}}\right)^{f(x)\cdot e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3+3x}{x^3+3x+2}\right)^{x^3+3x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(1+\dfrac{-2}{x^3+3x+2}\right)^{\frac{x^3+3x+2}{-2}}\right)^{\frac{-2\left(x^3+3x+1\right)}{x^3+3x+2}}=$ | **3p** |
| | $=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2\left(x^3+3x+1\right)}{x^3+3x+2}}=e^{-2}$ | **2p** |
| **c)** | $g(x)=\left\lvert x^3+3x\right\rvert=\begin{cases}-x^3-3x, & x\in(-\infty,0)\\ x^3+3x, & x\in[0,+\infty)\end{cases}$ | **2p** |
| | $g$ este continuă și, cum pentru orice $x\in(-\infty,0)$, $g'(x)=-3x^2-3<0\Rightarrow g$ este strict descrescătoare pe $(-\infty,0)$ și pentru orice $x\in(0,+\infty)$, $g'(x)=3x^2+3>0\Rightarrow g$ este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$, obținem că funcția $g$ are un singur punct de extrem | **3p** |
| **2.a)** | $\displaystyle\int_4^6\frac{f(x)}{\ln(x-1)}dx=\int_4^6 x\,dx=\left.\frac{x^2}{2}\right\rvert_4^6=$ | **3p** |
| | $=18-8=10$ | **2p** |
| **b)** | $F$ este o primitivă a lui $f$, deci $F'(x)=f(x)=x\ln(x-1)$, de unde obținem că $F'(x)>0$, pentru orice $x\in(2,+\infty)$, deci $F$ este strict crescătoare pe $(2,+\infty)$ | **3p** |
| | Cum $2<\sqrt{7}<3$, obținem că $F\left(\sqrt{7}\right)<F(3)$ | **2p** |
| **c)** | $\displaystyle\int_3^5 f(x)dx=\int_3^5\left(\frac{x^2-1}{2}\right)'\ln(x-1)dx=\left.\frac{x^2-1}{2}\ln(x-1)\right\rvert_3^5-\frac{1}{2}\int_3^5\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}dx=$ | **3p** |
| | $=12\ln 4-4\ln 2-\left.\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2}{2}+x\right)\right\rvert_3^5=20\ln 2-5=5\left(4\ln 2-1\right)$, de unde obținem $m=5$ | **2p** |