Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii
- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că numărul $N=\log_2 24-\log_2 12+3$ este pătratul unui număr natural.
5p	**2.** Determinați numărul real a pentru care punctul $A\left(a,a^2\right)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2-2x-2}=x-2$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{1!, 2!, 3!, ..., 10!\}$, acesta să fie divizibil cu 9.
5p	**5.** Se consideră triunghiul ABC și punctul D mijlocul segmentului BC. Arătați că, pentru orice puncte E și F astfel încât $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{FD}$, are loc relația $2\left(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{FC}\right)=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.
5p	**6.** Arătați că $(\sin x+\cos x)^2-(\sin x-\cos x)^2=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x^2 & 1 \\ x-1 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det\left(A(-1)\right)=3$.
5p	**b)** Demonstrați că matricea $A(x)$ este inversabilă, pentru orice număr real x.
5p	**c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A(1)\cdot X\cdot A(1)=A(2)$.
	2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă şi cu element neutru $x\circ y=xy-\sqrt{2}(x+y-1)+2$.
5p	**a)** Arătați că $\sqrt{2}\circ 0=\sqrt{2}$.
5p	**b)** Determinați numerele reale x pentru care $\left(x-\sqrt{2}\right)\circ\left(x+\sqrt{2}\right)=x$.
5p	**c)** Determinați numerele raționale al căror simetric în raport cu legea de compoziție „$\circ$” este număr rațional.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$, $f(x)=x\left(1-\frac{1}{x}\ln\left(x^2+1\right)\right)$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați numărul natural nenul n, știind că tangenta la graficul funcției f în punctul $A\left(n,f(n)\right)$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y=\frac{1}{5}x+1$.
5p	**c)** Demonstrați că funcția f este bijectivă.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^3}-\frac{2\ln x}{x^3}$ și funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{\ln x}{x^2}$, o primitivă a lui f.

5p **a)** Arătați că $\int_1^e x^2\left(f(x)+\frac{2\ln x}{x^3}\right)dx=1$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^{\sqrt{5}} x\cdot f\left(x^2+3\right)dx=-\frac{5\ln 2}{128}$.

5p **c)** Determinați numerele reale a pentru care $\int_e^{e^2} x\cdot F(x)\,dx=\frac{a^2-1}{2}$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$N=\log_2\frac{24}{12}+3=\log_2 2+3=$	**3p**
	$=1+3=4=2^2$	**2p**
2.	$f(a)=a^2 \Leftrightarrow a^2-2a+1=0$	**3p**
	$a=1$	**2p**
3.	$x^2-2x-2=(x-2)^2 \Rightarrow x^2-2x-2=x^2-4x+4$	**3p**
	$x=3$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea A are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**2p**
	Numerele divizibile cu 9 din mulțimea A sunt $6!$, $7!$, $8!$, $9!$ și $10!$, deci sunt 5 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{1}{2}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$	**2p**
	$2\left(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{FC}\right)=2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$	**3p**
6.	$(\sin x+\cos x)^2-(\sin x-\cos x)^2=4\sin x\cos x=$	**2p**
	$=2\sin 2x=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(-1)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(-1))=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1\cdot 1-1\cdot(-2)=3$	**3p**
b)	$\det(A(x))=\begin{vmatrix}x^2 & 1\\ x-1 & 1\end{vmatrix}=x^2-x+1$, pentru orice număr real x	**3p**
	Cum $\det(A(x))\neq 0$ pentru orice număr real x, obținem că matricea $A(x)$ este inversabilă pentru orice număr real x	**2p**
c)	$A(1)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow (A(1))^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	**2p**
	Cum $A(2)=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ și $X=(A(1))^{-1}\cdot A(2)\cdot(A(1))^{-1}$, obținem $X=\begin{pmatrix}3 & -3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$	**3p**
2.a)	$\sqrt{2}\circ 0=\sqrt{2}\cdot 0-\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+0-1\right)+2=$	**3p**
	$=-2+\sqrt{2}+2=\sqrt{2}$	**2p**

b)	$x^2-2-\sqrt{2}\left(x-\sqrt{2}+x+\sqrt{2}-1\right)+2=x \Leftrightarrow x^2-\left(2\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}=0$	**3p**
	$x=\sqrt{2}-1$ sau $x=\sqrt{2}+2$	**2p**
c)	$e=\sqrt{2}+1$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”, deci a este simetrizabil în raport cu „$\circ$” dacă și numai dacă există a', astfel încât $a\circ a'=a'\circ a=\sqrt{2}+1$	**2p**
	$aa'-\sqrt{2}\left(a+a'-1\right)+2=\sqrt{2}+1 \Leftrightarrow aa'+1-\sqrt{2}\left(a+a'\right)=0$ deci, dacă a și a' sunt numere raționale, obținem $a+a'=0$ și $aa'=-1$, deci $a=-1$ sau $a=1$, care convin	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(x-\ln\left(x^2+1\right)\right)'=1-\dfrac{1}{x^2+1}\cdot 2x=$	**3p**
	$=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1}=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul A este paralelă cu dreapta de ecuație $y=\dfrac{1}{5}x+1$, deci $f'(n)=\dfrac{1}{5}$	**3p**
	$5(n-1)^2=n^2+1 \Leftrightarrow 2n^2-5n+2=0$ și, cum n este număr natural nenul, obținem $n=2$	**2p**
c)	$f'(x)>0$, pentru orice $x\in(0,1)\Rightarrow f$ strict crescătoare pe $(0,1)$, $f'(x)>0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)\Rightarrow f$ strict crescătoare pe $(1,+\infty)$ și, cum f este continuă în $x=1$, obținem că f este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$, deci injectivă	**2p**
	Cum $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ și f este continuă și strict crescătoare pe $(0,+\infty)$, obținem că f este surjectivă, deci bijectivă	**3p**
2.a)	$\displaystyle\int_1^e x^2\left(f(x)+\frac{2\ln x}{x^3}\right)dx=\int_1^e\frac{1}{x}\,dx=\ln x\Big\|_1^e=$	**3p**
	$=\ln e-\ln 1=1$	**2p**
b)	$\displaystyle\int_1^{\sqrt{5}}x\cdot f\left(x^2+3\right)dx=\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{5}}\left(x^2+3\right)'\cdot f\left(x^2+3\right)dx=\frac{1}{2}F\left(x^2+3\right)\Big\|_1^{\sqrt{5}}=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln 8}{64}-\dfrac{\ln 4}{16}\right)=-\dfrac{5\ln 2}{128}$	**2p**
c)	$\displaystyle\int_e^{e^2}xF(x)\,dx=\int_e^{e^2}\frac{\ln x}{x}dx=\frac{\ln^2 x}{2}\Big\|_e^{e^2}=\frac{\ln^2\left(e^2\right)-\ln^2 e}{2}=\frac{3}{2}$	**3p**
	$\dfrac{a^2-1}{2}=\dfrac{3}{2}$, de unde obținem $a=-2$ sau $a=2$	**2p**