Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(\sqrt{8}+1\right)\cdot\left(2\sqrt{2}-1\right)-\sqrt{36}=1$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5x-1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=5+2x$. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor f și g.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2+6x}=x$.

5p **4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, numărul $4\cdot n$ să fie element al mulțimii A.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$, $B(3,4)$ și C, astfel încât punctul A este mijlocul segmentului BC. Arătați că triunghiul AOC este dreptunghic isoscel.

5p **6.** Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC în care $\sin 30°\cdot\sin A=\cos 60°\cdot\cos A$. Calculați $\operatorname{tg} A$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & -6\\ 2 & -3\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B(a)=\begin{pmatrix}0 & a-2\\ 1 & 3a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=3$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $A\cdot A+A=2B(x)$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\det\left(B(a)\cdot A+B(3a)\right)=4$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=(xy+1)(x+y)$.

5p **a)** Arătați că $1*2=9$.

5p **b)** Arătați că $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Determinați numerele naturale nenule n pentru care numărul $N=n*\frac{1}{n}$ este întreg.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)e^x-\frac{x^2}{2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=x\left(e^x-1\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x^2}=0$.

5p **c)** Arătați că $f(x)\le f\left(x^2\right)$, pentru orice $x\in(-\infty,0]$.

2. Se consideră funcția $f:(-4,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{4x}{x+4}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 (x+4)f(x)\,dx=6$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^4 \frac{1}{x}\cdot f\left(x^2\right)dx=4\ln 2$.

5p **c)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este convexă.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(\sqrt{8}+1\right)\cdot\left(2\sqrt{2}-1\right)-\sqrt{36}=\left(2\sqrt{2}\right)^2-1-6=$	**3p**
	$=8-7=1$	**2p**
2.	$f(x)=g(x)\Leftrightarrow 5x-1=5+2x$	**2p**
	Coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor f și g sunt $x=2$ și $y=9$	**3p**
3.	$x^2+6x=x^2$	**3p**
	$x=0$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea A are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**2p**
	Numerele n din mulțimea A pentru care numărul $4\cdot n$ este element al mulțimii A sunt 0, 1 și 2, deci sunt 3 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{3}{10}$	**1p**
5.	$2=\dfrac{3+x_C}{2}$ și $1=\dfrac{4+y_C}{2}$, deci punctul C are coordonatele $x_C=1$ și $y_C=-2$	**2p**
	$OA=\sqrt{5}$, $OC=\sqrt{5}$ și $AC=\sqrt{10}$, deci $OA^2+OC^2=AC^2$, de unde obținem că triunghiul AOC este dreptunghic isoscel	**3p**
6.	$\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}$, $\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$	**2p**
	$\dfrac{1}{2}\cdot\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot\cos A$, deci $\sin A=\cos A$, de unde obținem $\operatorname{tg} A=1$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}3 & -6\\ 2 & -3\end{vmatrix}=3\cdot(-3)-(-6)\cdot 2=$	**3p**
	$=-9+12=3$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}\Rightarrow A\cdot A+A=\begin{pmatrix}0 & -6\\ 2 & -6\end{pmatrix}$	**2p**
	$A\cdot A+A=2\begin{pmatrix}0 & -3\\ 1 & -3\end{pmatrix}=2B(-1)$, de unde obținem $x=-1$	**3p**
c)	$B(a)\cdot A=\begin{pmatrix}2a-4 & -3a+6\\ 3+6a & -6-9a\end{pmatrix}$, $B(3a)=\begin{pmatrix}0 & 3a-2\\ 1 & 9a\end{pmatrix}$, deci $B(a)\cdot A+B(3a)=\begin{pmatrix}2a-4 & 4\\ 4+6a & -6\end{pmatrix}$, pentru orice număr real a	**3p**
	$\det\left(B(a)\cdot A+B(3a)\right)=-36a+8$, pentru orice număr real a, deci $-36a+8=4\Rightarrow a=\dfrac{1}{9}$	**2p**

2.a)	$1*2=(1\cdot 2+1)(1+2)=$ $=3\cdot 3=9$	**3p** **2p**
b)	$x*0=(x\cdot 0+1)(x+0)=1\cdot x=x$, pentru orice număr real x $0*x=(0\cdot x+1)(0+x)=1\cdot x=x$, pentru orice număr real x, deci $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**2p** **3p**
c)	$N=2\left(n+\frac{1}{n}\right)=2n+\frac{2}{n}$, pentru orice număr natural nenul n N este număr întreg, deci $\frac{2}{n}$ este număr întreg și, cum n este număr natural nenul, obținem $n=1$ sau $n=2$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=e^x+(x-1)e^x-\frac{2x}{2}=$ $=xe^x-x=x\left(e^x-1\right),\ x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{\left(x^2\right)'}=$ $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\left(e^x-1\right)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2}=0$	**2p** **3p**
c)	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\Rightarrow f$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$ Cum $x\leq 0\leq x^2$, pentru orice $x\in(-\infty,0]$, obținem $f(x)\leq f\left(x^2\right)$, pentru orice $x\in(-\infty,0]$	**2p** **3p**
2.a)	$\int_1^2 (x+4)f(x)\,dx=\int_1^2 4x\,dx=2x^2\Big\vert_1^2=$ $=8-2=6$	**3p** **2p**
b)	$\int_1^4 \frac{1}{x}\cdot f\left(x^2\right)dx=2\int_1^4\frac{2x}{x^2+4}dx=2\int_1^4\left(x^2+4\right)'\cdot\frac{1}{x^2+4}dx=2\ln\left(x^2+4\right)\Big\vert_1^4=$ $=2\ln 20-2\ln 5=4\ln 2$	**3p** **2p**
c)	Dacă $F:(-4,+\infty)\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f, atunci $F'(x)=f(x)$, pentru orice $x\in(-4,+\infty)$ $F''(x)=f'(x)=\frac{16}{(x+4)^2}>0$, pentru orice $x\in(-4,+\infty)$, deci orice primitivă a funcției f este convexă	**2p** **3p**