Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică *M_pedagogic*

Model

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)+3=\sqrt{12}$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x-1$. Determinați numerele naturale a pentru care $f(a)>g(a)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x+2}\cdot 2^{x+1}+2\cdot 6^x=120$.

5p **4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale nenule mai mici decât 114, acesta să fie divizibil cu 4.

5p **5.** Determinați numărul real a, știind că punctul $M(a,15)$ aparține dreptei d de ecuație $y=3x+2a$.

5p **6**. Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A, cu $AB=3$, $AC=4$ și înălțimea AD, unde punctul D aparține laturii BC. Arătați că $\sin\sphericalangle BAD=\frac{3}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=2xy-x-y+1$.

5p **1.** Arătați că $(-1)\circ(-1)=5$.

5p **2.** Demonstrați că $x\circ y=2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **3.** Arătați că $e=1$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **4.** Arătați că $x\circ\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\circ x=\frac{1}{2}$, pentru orice număr real x.

5p **5.** Calculați $\frac{1}{3}\circ\frac{2}{4}\circ\frac{3}{5}\circ\ldots\circ\frac{2020}{2022}$.

5p **6.** Determinați numărul real strict pozitiv x, pentru care $\left(\log_2 x+\frac{1}{2}\right)\circ\left(\log_3 x+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}$ și $M(a)=\begin{pmatrix}a&2\\2&a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **1.** Arătați că $A\cdot A=4I_2$.

5p **2.** Arătați că $aI_2+A=M(a)$, pentru orice număr real a.

5p **3.** Arătați că $M(2)\cdot M(4)=6M(2)$.

5p **4.** Determinați perechile (a,b) de numere naturale pentru care $M(a)\cdot M(b)=7\cdot I_2+4\cdot A$.

5p **5.** Determinați numărul natural k pentru care $\det(M(k+2))\le 0$.

5p **6.** Determinați numărul real a, $a<-2$, știind că inversa matricei $M(a)$ este matricea $M(a)-2\cdot A$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică *M_pedagogic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)+3=2\sqrt{3}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+3=2\sqrt{3}$	**3p**
	$\sqrt{12}=2\sqrt{3}$, deci $\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)+3=\sqrt{12}$	**2p**
2.	$a+1>2a-1$	**2p**
	$a<2$ și cum a este număr natural, obținem $a=0$ sau $a=1$	**3p**
3.	$3^x\cdot 3^2\cdot 2^x\cdot 2+2\cdot 6^x=120 \Leftrightarrow 18\cdot 6^x+2\cdot 6^x=120$, deci $20\cdot 6^x=120$	**3p**
	$6^x=6\Rightarrow x=1$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale nenule mai mici decât 114 are 113 elemente, deci sunt 113 cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale nenule mai mici decât 114 sunt 28 numere divizibile cu 4, deci sunt 28 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{28}{113}$	**1p**
5.	$M(a,15)\in d\Rightarrow 15=3a+2a$	**3p**
	$15=5a\Rightarrow a=3$	**2p**
6.	$BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=5$, $AB^2=BD\cdot BC\Rightarrow BD=\dfrac{9}{5}$	**3p**
	$\sin\sphericalangle BAD=\dfrac{BD}{AB}=\dfrac{3}{5}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	$(-1)\circ(-1)=2\cdot(-1)\cdot(-1)-(-1)-(-1)+1=$	**2p**
	$=2+1+1+1=5$	**3p**
2.	$x\circ y=2xy-x-y+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=2x\left(y-\dfrac{1}{2}\right)-\left(y-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{2}=$	**3p**
	$=2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(y-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{2}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
3.	$x\circ 1=2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{2}=x-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$1\circ x=2\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{2}=x-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=x=x\circ 1$, pentru orice număr real x, deci $e=1$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”	**3p**

4.	$x\circ\frac{1}{2}=2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, pentru orice număr real x $\frac{1}{2}\circ x=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, deci $x\circ\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\circ x=\frac{1}{2}$, pentru orice număr real x	**2p** **3p**
5.	$\frac{1}{3}\circ\frac{2}{4}\circ\frac{3}{5}\circ\ldots\circ\frac{2020}{2022}=\left(\frac{1}{3}\circ\frac{1}{2}\right)\circ\frac{3}{5}\circ\ldots\circ\frac{2020}{2022}=$ $=\frac{1}{2}\circ\left(\frac{3}{5}\circ\ldots\circ\frac{2020}{2022}\right)=\frac{1}{2}$	**2p** **3p**
6.	$\left(\log_2 x+\frac{1}{2}\right)\circ\left(\log_3 x+\frac{1}{2}\right)=2\left(\log_2 x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(\log_3 x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=2\cdot\log_2 x\cdot\log_3 x+\frac{1}{2}$, $2\cdot\log_2 x\cdot\log_3 x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\log_2 x\cdot\log_3 x=0$, de unde obținem $x=1$, care convine	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	$A\cdot A=\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}$ $4I_2=4\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}$, deci $A\cdot A=4I_2$	**3p** **2p**
2.	$aI_2+A=a\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&0\\0&a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}a&2\\2&a\end{pmatrix}=M(a)$, pentru orice număr real a	**3p** **2p**
3.	$M(2)\cdot M(4)=\left(2I_2+A\right)\left(4I_2+A\right)=8I_2+6A+4I_2=$ $=12I_2+6A=6\left(2I_2+A\right)=6\cdot M(2)$	**3p** **2p**
4.	$M(a)\cdot M(b)=(ab+4)\cdot I_2+(a+b)\cdot A=7\cdot I_2+4\cdot A\Rightarrow$ $\Rightarrow ab=3$ și $a+b=4$ și cum a și b sunt numere naturale, obținem perechile $(3,1)$ și $(1,3)$	**3p** **2p**
5.	$M(k+2)=\begin{pmatrix}k+2&2\\2&k+2\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(M(k+2)\right)=(k+2)^2-4=k^2+4k$ $k^2+4k\le 0$ și k număr natural, obținem $k=0$	**3p** **2p**
6.	$M(a)-2\cdot A=\begin{pmatrix}a&2\\2&a\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&4\\4&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&-2\\-2&a\end{pmatrix}$ $M(a)\cdot\left(M(a)-2\cdot A\right)=\left(M(a)-2\cdot A\right)\cdot M(a)=I_2$, deci $a^2=5$, și cum $a<-2$, obținem că $a=-\sqrt{5}$	**2p** **3p**