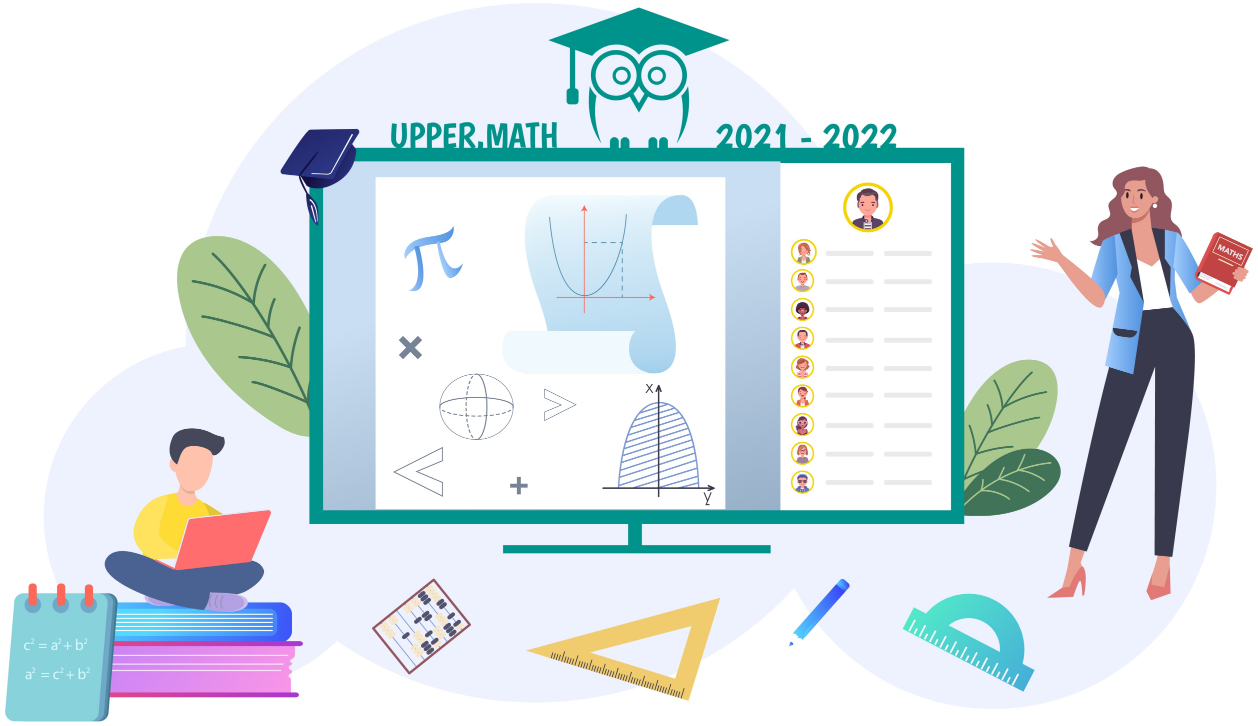


Simulare 1 - Evaluare națională
17 octombrie 2021

- Subiecte -

Lioara Ivanovici

- *Toate subiectele sunt obligatorii.*
- *Se acordă zece puncte din oficiu.*
- *Timpul de lucru efectiv este de două ore.*

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

1.1 (5p). Rezultatul calculului $7 - 2 \cdot \sqrt{3^2 + 4^2}$ este egal cu:

a) 25 b) -3 c) 5 d) 17

1.2 (5p). Produsul numerelor naturale nenule din intervalul $[-5, n)$ este egal cu 120, iar $n \in \mathbb{N}$. Valoarea numărului n este egală cu:

a) 5 b) 6 c) 120 d) 7

1.3 (5p). La prima simulare a examenului de evaluare națională s-au înscris 100 de copii. Pentru a doua s-au înscris cu 60% mai mulți. Numărul total al copiilor care participă la a doua simulare este egal cu:

a) 60 b) 100 c) 260 d) 160

1.4 (5p). Numărul divizibil cu 7 din mulțimea $\{91, 97, 93, 98\}$ este:

a) 91 b) 97 c) 93 d) 95

1.5 (5p). În tabelul următor este înregistrată prezența celor 20 de elevi ai clasei a VIII-a pe parcursul săptămânii trecute.

	Luni	Marți	Miercuri	Joi	Vineri
Număr elevi prezenți	20	19	16	20	18

Numărul total al absenților de săptămâna trecută a fost egal cu:

a) 4 b) 8 c) 7 d) 6

1.6 (5p). Fracția $\frac{14}{21}$ este echivalentă cu fracția:

a) $\frac{3}{7}$ b) $\frac{7}{3}$ c) $\frac{22}{33}$ d) $\frac{1}{3}$

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

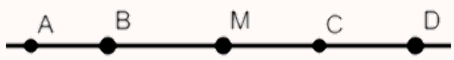
2.1 (5p). În figura alăturată punctele A, B, M, C, D sunt coliniare în această ordine, astfel încât $AB < BC$, D este simetricul lui A față de M, iar $AB = CD$. Afirmația corectă este:

a) punctul B este mijlocul segmentului (AC)

b) $AB > BD$

c) punctul M este mijlocul segmentului (BD)

d) $BM = MC$



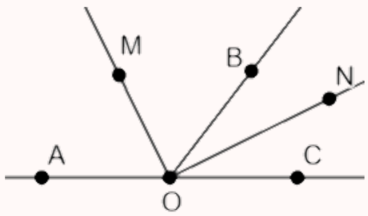
2.2 (5p). Unghiurile $\angle AOB$ și $\angle BOC$ sunt unghiuri adiacente și suplementare. Semidreptele $(OM$ și $(ON$ sunt bisectoarele unghiurilor $\angle AOB$, respectiv $\angle BOC$. Măsura unghiului $\angle MON$ este egală cu:

a) $60°$

b) $90°$

c) $100°$

d) $45°$



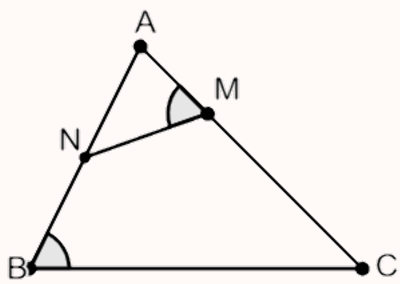
2.3 (5p). În figura alăturată este reprezentat triunghiul $\triangle ABC$, iar pe laturile (AB), respectiv (AC) se consideră punctele N, respectiv M, astfel încât $\angle AMN \equiv \angle ABC$, $AM = 4\ cm$, $AB = 12\ cm$ și $BC = 21\ cm$. Lungimea segmentului (MN) este egală cu:

a) 63 cm

b) 7 cm

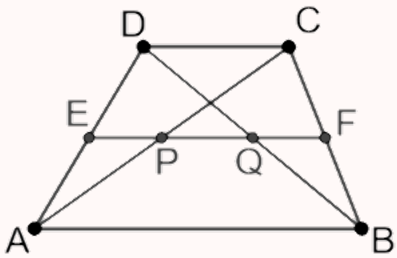
c) 14 cm

d) 4 cm



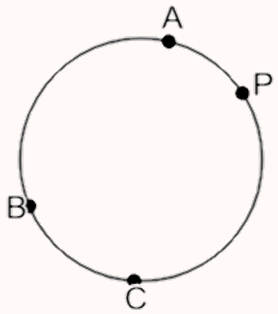
2.4 (5p). În figura alăturată este reprezentat trapezul $ABCD$, iar punctele P și Q reprezintă intersecțiile liniei mijlocii (EF) cu diagonalele (AC), respectiv (BD). Lungimea bazei mari AB este de 91 cm, iar raportul dintre lungimea bazei mici și lungimea bazei mari este $\frac{1}{13}$. Lungimea segmentului PQ este egală cu:

a) 49 cm b) 44 cm c) 41 cm d) 42 cm



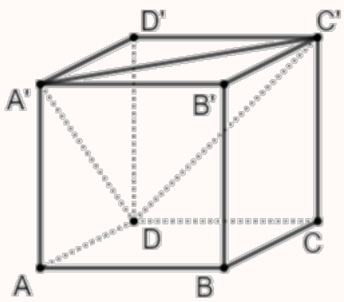
2.5 (5p). În figura alăturată punctele A, B, C, P sunt situate pe un cerc astfel încât măsura unghiului $\angle BAC$ este de $37°$. Măsura unghiului $\angle BPC$ este egală cu:

a) $37°$ b) $72°$ c) $74°$ d) $18°30'$



2.6 (5p). În figura alăturată este reprezentat cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu lungimea laturii $AB = 7$ cm. Perimetrul triunghiului $\triangle A'C'D$ este egal cu:

a) 21 cm b) $28\sqrt{2}$ cm c) $21\sqrt{3}$ cm d) $21\sqrt{2}$ cm



SUBIECTUL al III-lea

Scrie rezolvările complete. **(30 de puncte)**

3.1 (5p). Din suma pe care o are, Ana a cheltuit două cincimi în primul magazin. După ce a cheltuit 42 RON în al doilea magazin, a constatat că mai are un sfert din suma inițială.

a) Care este suma inițială pe care o avea Ana?

b) Care este procentul din suma inițială pe care l-a cheltuit Ana în al doilea magazin?

3.2 (5p). Considerăm numerele $a = \left|3 + 2\sqrt{2}\right|$ și $b = \left|2\sqrt{2} - 3\right|$.

a) Demonstrați că suma inverselor numerelor a și b este un număr natural par.

b) Demonstrați că partea întreagă a numărului b este egală cu 0.

3.3 (5p). Se consideră mulțimile

$$A = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, |3x - 1| < 3\right\},\ B = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 2(x + 1) + x < 5\right\}.$$

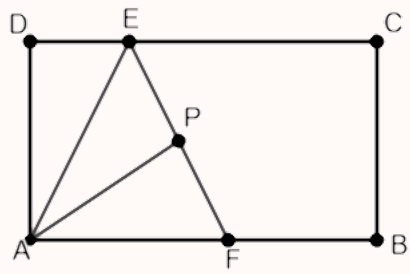
a) Arătați că cel mai mic element al mulțimii A este 0.

b) Determinați $A \cap B$.

3.4 (5p). Pe laturile dreptunghiului $ABCD$ din figura alăturată se consideră punctele $E \in (DC)$ și $F \in (AB)$, astfel încât triunghiul $\triangle AEF$ este echilateral. Se știe că $AE = 12\ cm$, $FB = 6\ cm$ și P este punctul de intersecție al bisectoarei unghiului $\angle EAF$ cu latura (EF).

a) Demonstrați că perimetrul trapezului $EFBC$ este egal cu $6(5 + \sqrt{3})\ cm$.

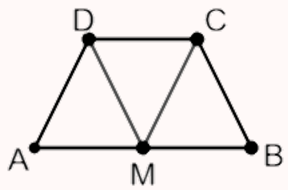
b) Demonstrați că punctele A, P, C sunt coliniare.



3.5 (5p). În figura alăturată este reprezentat trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AB = 120$ cm, $BC = AD = 100$ cm și $m(\angle ADC) = 120°$.

a) Arătați că aria trapezului $ABCD$ este mai mică decât 6100.

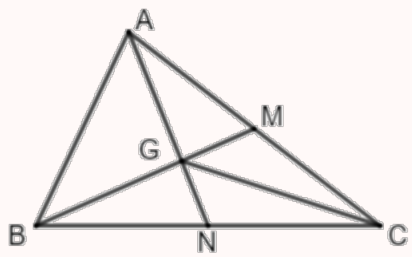
b) Dacă M este mijlocul bazei (AB), demonstrați că $\sin(\angle DMC) = \frac{5\sqrt{3}}{38}$.



3.6 (5p). În figura alăturată este reprezentat un triunghi $\triangle ABC$, iar punctele M și N sunt mijloacele laturilor (AC), respectiv (BC). Notăm cu G punctul de intersecție al segmentelor (AN) și (BM). Mai știm că segmentele (AB) și (CG) au lungimi egale, iar $AG = 4$ cm, $GM = 3$ cm.

a) Demonstrați că $BG = 6$ cm;

b) Demonstrați că măsura unghiului $\angle AGB$ este de $90°$.



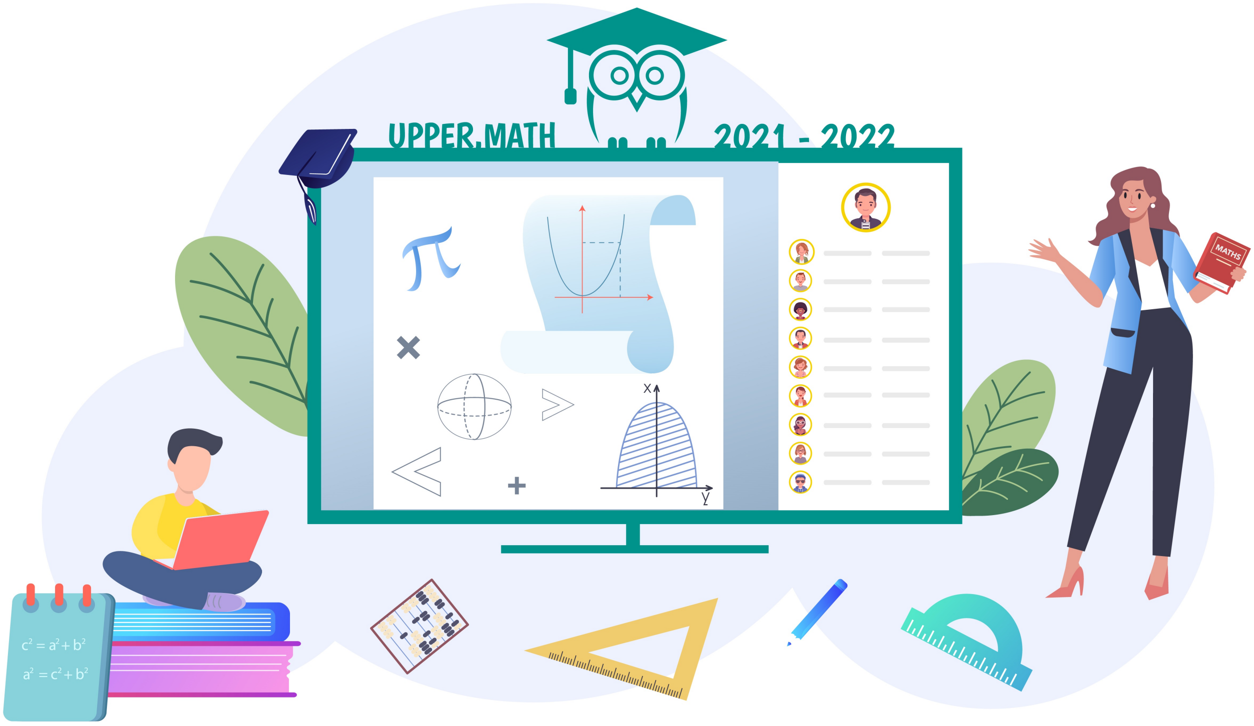
SUBIECTUL I și SUBIECTUL al II-lea

- *Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.*
- *Nu se acordă punctaje intermediare.*

SUBIECTUL al III-lea

- *Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.*
- *Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.*

Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.



Simulare 1 - Evaluare națională
17 octombrie 2021

- Soluții -

Lioara Ivanovici

- *Toate subiectele sunt obligatorii.*
- *Se acordă zece puncte din oficiu.*
- *Timpul de lucru efectiv este de două ore.*

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

1.1 (5p)**.** Rezultatul calculului $7 - 2 \cdot \sqrt{3^2 + 4^2}$ este egal cu:

a) 25 b) -3 c) 5 d) 17

Demonstrație. $7 - 2 \cdot \sqrt{3^2 + 4^2} = 7 - 2 \cdot \sqrt{9 + 16} = 7 - 2 \cdot 5 = 7 - 10 = \boxed{-3}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$ .... $5p$

□

1.2 (5p)**.** Produsul numerelor naturale nenule din intervalul $[-5, n)$ este egal cu 120, iar $n \in \mathbb{N}$. Valoarea numărului n este egală cu:

a) 5 b) 6 c) 120 d) 7

Demonstrație. Numărul 120 este produsul primelor 5 numere naturale consecutive nenule.$120 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$. Intervalul este deschis la dreapta, adică nu îl conține și pe n, așadar cel mai mare număr natural din interval este 5, iar $\boxed{n = 6}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$ .... $5p$

□

1.3 (5p)**.** La prima simulare a examenului de evaluare națională s-au înscris 100 de copii. Pentru a doua s-au înscris cu 60% mai mulți. Numărul total al copiilor care participă la a doua simulare este egal cu:

a) 60 b) 100 c) 260 d) 160

Demonstrație. Vom calcula mai întâi câți copii s-au înscris în plus la a doua simulare.
$\frac{60}{100} \cdot 100 = 60$. La a doua simulare participă $100 + 60 = \boxed{160}$ de copii.

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ .... $5p$

□

1.4 (5p)**.** Numărul divizibil cu 7 din mulțimea $\{91, 97, 93, 98\}$ este:

a) 91 b) 97 c) 93 d) 95

Demonstrație. Singurul număr divizibil cu 7 din mulțime este $\boxed{91}$ pentru că $91 = 7 \cdot 13$, restul numerelor dau resturi nenule la împărțirea prin 7. $97 = 7 \cdot 13 + 6$, $93 = 7 \cdot 13 + 2$ și $95 = 7 \cdot 13 + 4$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$ .... $5p$

□

1.5 (5p). În tabelul următor este înregistrată prezența celor 20 de elevi ai clasei a VIII-a pe parcursul săptămânii trecute.

	Luni	Marți	Miercuri	Joi	Vineri
Număr elevi prezenți	20	19	16	20	18

Numărul total al absenților de săptămâna trecută a fost egal cu:

a) 4 b) 8 c) 7 d) 6

Demonstrație. Luni au fost prezenți toți elevii, marți a lipsit 1 elev, miercuri 4, joi niciunul, iar vineri 2. Numărul total al absenților este $1 + 4 + 2 = \boxed{7}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ 5*p*

□

1.6 (5p). Fracția $\frac{14}{21}$ este echivalentă cu fracția:

a) $\frac{3}{7}$ b) $\frac{7}{3}$ c) $\frac{22}{33}$ d) $\frac{1}{3}$

Demonstrație. $\frac{14^{(7}}{21} = \frac{2}{3} = {}^{11)}\frac{2}{3} = \boxed{\frac{22}{33}}$.

$\frac{3}{7} \neq \frac{14}{21}$ pentru că $14 \cdot 7 = 98 \neq 21 \cdot 3 = 63$.

$\frac{14}{21} \neq \frac{7}{3}$ pentru că prima este subunitară, iar a doua este supraunitară.

$\frac{14}{21} \neq \frac{1}{3}$ pentru că $14 \cdot 3 = 42 \neq 21 \cdot 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ 5*p*

□

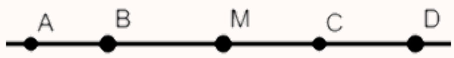
SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

2.1 (5p). În figura alăturată punctele A, B, M, C, D sunt coliniare în această ordine, astfel încât $AB < BC$, D este simetricul lui A față de M, iar $AB = CD$. Afirmația corectă este:

a) punctul B este mijlocul segmentului (AC) b) $AB > BD$

c) punctul M este mijlocul segmentului (BD) d) $BM = MC$



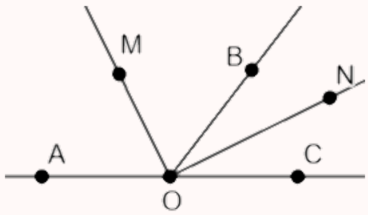
Demonstrație. $AM = MD$ pentru că D este simetricul lui A față de M. $BM = AM - AB = MD - CD = MC$, adică M este mijlocul segmentului (BC).

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ .... $5p$

□

2.2 (5p). Unghiurile $\angle AOB$ și $\angle BOC$ sunt unghiuri adiacente și suplementare. Semidreptele $(OM$ și $(ON$ sunt bisectoarele unghiurilor $\angle AOB$, respectiv $\angle BOC$. Măsura unghiului $\angle MON$ este egală cu:

a) $60°$ b) $90°$ c) $100°$ d) $45°$



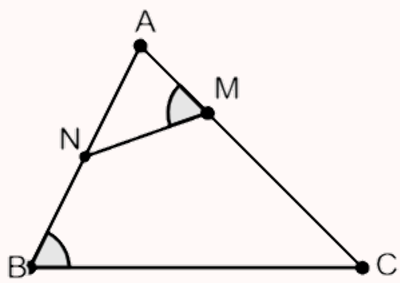
Demonstrație. $m(\angle MON) = m(\angle MOB) + m(\angle BON) = \dfrac{m(\angle AOB)}{2} + \dfrac{m(\angle BOC)}{2} = \dfrac{180°}{2} = \boxed{90°}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$ .... $5p$

□

2.3 (5p). În figura alăturată este reprezentat triunghiul $\triangle ABC$, iar pe laturile (AB), respectiv (AC) se consideră punctele N, respectiv M, astfel încât $\angle AMN \equiv \angle ABC$, $AM = 4$ cm, $AB = 12$ cm și $BC = 21$ cm. Lungimea segmentului (MN) este egală cu:

a) 63 cm b) 7 cm c) 14 cm d) 4 cm



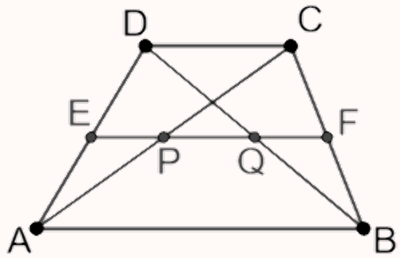
Demonstrație. Se observă că $\triangle ABC \sim \triangle AMN$ (cazul UU), pentru că $\angle ABC \equiv \angle AMN$ și $\angle BAC$ este unghi comun celor două triunghiuri $\Longrightarrow \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{MN}{BC} \iff \dfrac{4}{12} = \dfrac{MN}{21} \iff MN = \dfrac{4 \cdot 21}{12} = \boxed{7}$ *cm*.

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$ 5*p*

□

2.4 (5p). În figura alăturată este reprezentat trapezul $ABCD$, iar punctele P și Q reprezintă intersecțiile liniei mijlocii (EF) cu diagonalele (AC), respectiv (BD). Lungimea bazei mari AB este de 91 *cm*, iar raportul dintre lungimea bazei mici și lungimea bazei mari este $\dfrac{1}{13}$. Lungimea segmentului PQ este egală cu:

a) 49 *cm* b) 44 *cm* c) 41 *cm* d) 42 *cm*



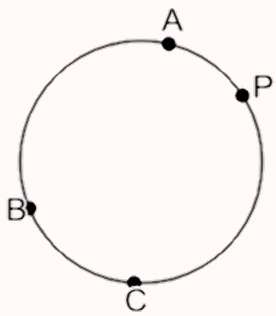
Demonstrație. Vom afla mai întâi lungimea bazei mari.
Din ipoteză știm că $\dfrac{CD}{AB} = \dfrac{1}{13} \iff CD = \dfrac{91}{13} = 7$ *cm*.
EF este linie mijlocie în trapez $\Longrightarrow EF = \dfrac{AB + CD}{2}$ si $EF \parallel AB \Longrightarrow EP \parallel DC$, $(AE) \equiv (ED) \Longrightarrow (EP)$ este linie mijlocie în triunghiul $\triangle ADC \Longrightarrow EP = \dfrac{DC}{2}$. Analog obținem că $QF = \dfrac{DC}{2}$. De aici avem că $PQ = EF - EP - FQ = \dfrac{AB + BC}{2} - 2 \cdot \dfrac{DC}{2} = \dfrac{91 - 7}{2} = \boxed{42}$ *cm*.

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ 5*p*

□

2.5 (5p). În figura alăturată punctele A, B, C, P sunt situate pe un cerc astfel încât măsura unghiului $\angle BAC$ este de $37°$. Măsura unghiului $\angle BPC$ este egală cu:

a) $37°$ b) $72°$ c) $74°$ d) $18°30'$



Demonstrație. Unghiul $\angle BAC$ este unghi înscris în cerc și măsura lui este jumătate din măsura arcului subîntins. Obținem:

$$m(\angle BAC) = \frac{m(\overset{\frown}{BC})}{2} \iff m(\overset{\frown}{BC}) = 2 \cdot 37^\circ = 74^\circ.$$

Pe de altă parte și $\angle BPC$ este unghi înscris în cerc. Așadar:

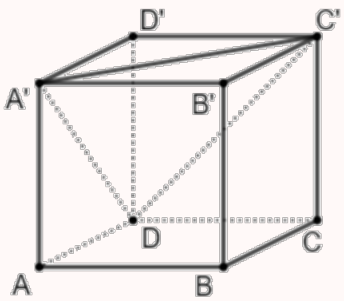
$$m(\angle BPC) = \frac{m(\overset{\frown}{BC})}{2} = \frac{74^\circ}{2} = \boxed{37^\circ}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$ 5*p*

□

2.6 (5p). În figura alăturată este reprezentat cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu lungimea laturii $AB = 7$ *cm*. Perimetrul triunghiului $\triangle A'C'D$ este egal cu:

a) 21 *cm* b) $28\sqrt{2}$ *cm* c) $21\sqrt{3}$ *cm* d) $21\sqrt{2}$ *cm*



Demonstrație. Laturile triunghiului $\triangle A'C'D$ sunt diagonale în fețele cubului, care sunt pătrate. Lungimea diagonalei pătratului se calculează cu formula $d = l\sqrt{2} \implies A'D = DC' = C'A = 7\sqrt{2}$.
$P_{A'C'D} = 3 \cdot A'C' = \boxed{21\sqrt{2}}$ *cm*.

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ 5*p*

□

SUBIECTUL al III-lea

Scrie rezolvările complete. **(30 de puncte)**

3.1 (5p). Din suma pe care o are, Ana a cheltuit două cincimi în primul magazin. După ce a cheltuit 42 RON în al doilea magazin, a constatat că mai are un sfert din suma inițială.

a) Care este suma inițială pe care o avea Ana?

b) Care este procentul din suma inițială pe care l-a cheltuit Ana în al doilea magazin?

Demonstrație. a) Vom nota cu S suma inițială pe care o are Ana. După ce a cheltuit două cincimi în primul magazin i-au mai rămas $S - \frac{2}{5} \cdot S = \frac{3}{5} \cdot S$. Suma care i-a rămas după ce a făcut cumpărături și în al doilea magazin este $\frac{3}{5} \cdot S - 42 = \frac{1}{4} \cdot S \iff 12S - 20 \cdot 42 = 5S \iff 7S = 20 \cdot 42 \iff S = 20 \cdot 6 \iff S = \boxed{120}$ RON.

b) Vom nota cu $p\%$ procentul din suma inițială cheltuit în al doilea magazin. Atunci $p\% \cdot 120 = 42 \iff \frac{p}{100} \cdot 120 = 42 \iff p = \frac{42 \cdot 100}{120} \iff p = \boxed{35}\%$.

Barem:

- *a)* Calculează suma care i-a rămas după cumpărăturile din primul magazin $S - \frac{2}{5} \cdot S = \frac{3}{5} \cdot S$, unde S reprezintă suma inițială 1*p*
- Scrie relația $\frac{3}{5} \cdot S - 42 = \frac{1}{4} \cdot S$ 1*p*
- Obține că suma inițială a fost 120 RON. 1*p*
- *b)* Demonstrează că procentul cheltuit în al doilea magazin este 35% 2*p*

□

3.2 (5p). Considerăm numerele $a = \left|3 + 2\sqrt{2}\right|$ și $b = \left|2\sqrt{2} - 3\right|$.

a) Demonstrați că suma inverselor numerelor a și b este un număr natural par.

b) Demonstrați că partea întreagă a numărului b este egală cu 0.

Demonstrație. a) Să observăm mai întâi că $2\sqrt{2} = \sqrt{8}$, iar $3 = \sqrt{9}$. Cum $\sqrt{8} < \sqrt{9} \implies b = \left|2\sqrt{2} - 3\right| = 3 - 2\sqrt{2}$.

Suma inverselor celor două numere este

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{3+2\sqrt{2}} + \frac{1}{3-2\sqrt{2}} = \frac{3 - 2\sqrt{2} + 3 + 2\sqrt{2}}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})} = \frac{6}{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = \frac{6}{1} = 6.$$

$6 \in \mathbb{N}$ și $6 = \boxed{2 \cdot 3}$, de unde rezultă că rezultatul este număr par.

b) Vom demonstra că $0 \leq \left|2\sqrt{2} - 3\right| < 1$.

Prima parte a inegalității este evidentă pentru că valoarea absolută a unui număr real este un număr nenegativ. Pentru a doua parte vom proceda astfel:

$\left|2\sqrt{2} - 3\right| < 1 \iff 3 - 2\sqrt{2} < 1 \iff 2 < 2\sqrt{2} \iff 4 < 8$, relație adevărată.

Prin urmare, partea întreagă a numărului b este egală cu $\boxed{0}$.

Barem:

- a) Demonstrează că $b = 3 - 2\sqrt{2}$ . . . . $1p$
- Obține că suma inverselor este 6. . . . . $1p$
- Justifică de ce 6 este număr natural par . . . . $1p$
- b) Afirmă că $0 \leq \left|2\sqrt{2} - 3\right|$ . . . . $1p$
- Demonstrează că $\left|2\sqrt{2} - 3\right| < 1$ . . . . $1p$

□

3.3 (5p). Se consideră mulțimile

$$A = \left\{x \in \mathbb{Z} \;\middle|\; |3x - 1| < 3\right\},\ B = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 2(x + 1) + x < 5\right\}.$$

a) Arătați că cel mai mic element al mulțimii A este 0.

b) Determinați $A \cap B$.

Demonstrație. a) Vom afla valorile întregi și nenule ale lui x care sunt soluții ale inecuației. $|3x - 1| < 3 \iff -3 < 3x - 1 < 3 \iff -2 < 3x < 4 \iff x \in \{0, 1\} \implies A = \{0, 1\}$, iar cel mai mic element al mulțimii A este $\boxed{x = 0}$.

b) Pentru a afla care sunt elementele mulțimii B vom rezolva inecuația $2(x + 1) + x < 5 \iff 2x + 2 + x < 5 \iff 3x < 3 \iff x < 1 \iff x \in (-\infty, 1)$. Deci $B = (-\infty, 1)$, iar $\boxed{A \cap B = \{0\}}$.

Barem:

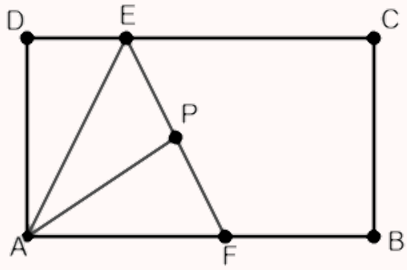
- a) Rescrie inecuația astfel $|3x - 1| < 3 \iff -3 < 3x - 1 < 3$ . . . . $1p$
- Determină elementele mulțimii A. . . . . $1p$
- Afirmă că 0 este cel mai mic element . . . . $1p$
- b) Obține că $B = (-\infty, 1)$ . . . . $1p$
- Obține $A \cap B = \{0\}$. . . . . $1p$

□

3.4 (5p). Pe laturile dreptunghiului $ABCD$ din figura alăturată se consideră punctele $E \in (DC)$ și $F \in (AB)$, astfel încât triunghiul $\triangle AEF$ este echilateral. Se știe că $AE = 12\ cm$, $FB = 6\ cm$ și P este punctul de intersecție al bisectoarei unghiului $\angle EAF$ cu latura (EF).

a) Demonstrați că perimetrul trapezului $EFBC$ este egal cu $6(5+\sqrt{3})\ cm$.

b) Demonstrați că punctele A, P, C sunt coliniare.



Demonstrație. a) Construim $ET \perp AF, T \in AB$. Atunci $EF \parallel AD$ (două drepte perpendiculare pe aceeași dreaptă sunt paralele între ele) și $AT \parallel DE$, de unde rezultă că $ADET$ este un paralelogram și $DE = AT$. Cum triunghiul $\triangle ABC$ este echilateral și ET este înălțime rezultă că ET este și mediană $\implies AT = TF = 6\ cm$.
Pentru că $ADET$ este dreptunghi avem că $AT = DE = 6$.
Pe de altă parte $AF = AE = 12$ pentru că sunt laturile unui triunghi echilateral și $AB = AF + FB = 18\ cm$.
Din același motiv obținem că $DC = AB = 18\ cm$ și $EC = DC - DE = 18 - 6 = 12\ cm$.
Triunghiul $\triangle AEF$ este echilateral, ET este înălțime $\implies ET = \dfrac{l\sqrt{3}}{2} = \dfrac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$.
$ABCD$ este dreptunghi $\implies BC = AD = 6\sqrt{3}$.
Triunghiul $\triangle AEF$ este echilateral și atunci $EF = AE = 12\ cm$.
Perimetrul trapezului $EFBC$ este $P_{ABCD} = EF + FB + BC + CE = 12 + 6 + 6\sqrt{3} + 12 = 30 + 6\sqrt{3} = \boxed{6(5+\sqrt{3})}\ cm$.

b) $AF \parallel EC$ și $(AF) \equiv (EC) \implies AECF$ este paralelogram $\implies$ diagonalele se înjumătățesc. Dar $\triangle AEF$ este echilateral, (AP este bisectoarea unghiului $\angle EAF \implies AP$ este mediană $\implies$ punctul P este mijlocul lui (EF). Cum (EF) și (AC) au același mijloc rezultă că punctele $\boxed{A, P, C \text{ sunt coliniare}}$.

Barem:

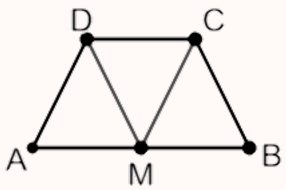
- Determină lungimea segmentului (EC) 1*p*
- Determină lungimea laturii (BC) 1*p*
- Obține că perimetrul trapezului $EFBC$ este egal cu $6(5+\sqrt{3})\ cm$. 1*p*
- Demonstrează că $AECF$ este paralelogram 1*p*
- Demonstrează că punctul P este mijlocul lui (EF). 1*p*

□

3.5 (5p). În figura alăturată este reprezentat trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AB = 120\ cm$, $BC = AD = 100\ cm$ și $m(\angle ADC) = 120°$.

a) Arătați că aria trapezului $ABCD$ este mai mică decât 6100.

b) Dacă M este mijlocul bazei (AB), demonstrați că $\sin(\angle DMC) = \dfrac{5\sqrt{3}}{38}$.



Demonstrație. a) $AB \parallel CD \implies m(\angle DAB) + m(\angle(ADC) = 180° \iff m(\angle DAB) + 120° = 180° \implies m(\angle DAB = 60°$. Construim $DE \perp AB, E \in (AB)$. În triunghiul dreptunghic $\triangle ADE$ suma măsurilor unghiurilor ascuțite este $90° \implies m(\angle DAB) + m(\angle ADE) = 90° \implies m(\angle ADE) = 30° \implies AE = \dfrac{AD}{2} = \dfrac{100}{2} = 50$ (teorema unghiului de 30°. În triunghiul dreptunghic $\triangle ADE$ aplicăm Teorema lui Pitagora și obținem $AD^2 = AE^2 + DE^2 \iff 100^2 = 50^2 + DE^2 \iff DE^2 = 7500 \iff DE = 50\sqrt{3}$. Construim și $CF \perp AB, F \in AB$. $(AD) \equiv (BC)$, $(DE) \equiv (CF) \implies \triangle ADE \equiv \triangle BCF \implies AE = BF = 50$. $EF = AB - AE - BF = 120 - 50 - 50 = 20$.

$$\left.\begin{array}{l} DC \parallel EF \\ DE \parallel CF \end{array}\right\} \implies DCFE \text{ este paralelogram și } DC = EF = 20.$$

$$A_{ABCD} = \frac{(AB + CD)\cdot DE}{2} = \frac{(120+20)\cdot 50\sqrt{3}}{2} = 3500\sqrt{3}.$$

Pentru a finaliza, vom demonstra că $\boxed{3500\sqrt{3} < 6100}$. Vom împărți prin 100 mai întâi și avem de demonstrat că $35\sqrt{3} < 61$, care, prin ridicare la pătrat, devine $3675 < 3721$, inegalitate adevărată.

b) Pentru a afla $\sin(\angle DMC)$ vom exprima aria triunghiului $\triangle DMC$ în două moduri. M este mijlocul lui $(AB) \implies AM = \dfrac{AB}{2} = 60$. $EM = AM - AE = 60 - 50 = 10$. În triunghiul dreptunghic $\triangle DEM$ vom aplica Teorema lui Pitagora și avem relația $DE^2 + EM^2 = DM^2 \iff DM^2 = 7600 \iff DM = 20\sqrt{19}$. Pentru că $DC \parallel AB \implies d(M, DC) = DE$.

$$A_{DMC} = \frac{d(M,DC)\cdot DC}{2} = \frac{DM \cdot MC \cdot \sin(\angle DMC)}{2} \iff$$

$$\iff \frac{50\sqrt{3}\cdot 20}{2} = \frac{20\sqrt{19}\cdot 20\sqrt{19}\sin(\angle DMC)}{2} \iff$$

$$\iff \sin(\angle DMC) = \boxed{\frac{5\sqrt{3}}{38}}.$$

Barem:

- *a)* Determină înălțimea trapezului 1*p*
- Obține că aria trapezului $ABCD$ este $3500\sqrt{3}$ și demonstrează că aceasta este mai mică decât 6100. .... 1*p*
- *b)* Determină lungimea laturii (DM) 1*p*

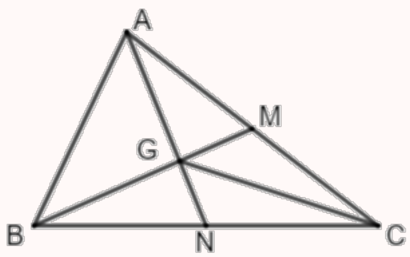
- Exprimă aria triunghiului $\triangle DMC$ în două moduri. . . . . $1p$
- Obține $\sin(\angle DMC) = \dfrac{5\sqrt{3}}{38}$ . . . . $1p$

□

3.6 (5p). În figura alăturată este reprezentat un triunghi $\triangle ABC$, iar punctele M și N sunt mijloacele laturilor (AC), respectiv (BC). Notăm cu G punctul de intersecție al segmentelor (AN) și (BM). Mai știm că segmentele (AB) și (CG) au lungimi egale, iar $AG = 4\ cm$, $GM = 3\ cm$.

a) Demonstrați că $BG = 6\ cm$;

b) Demonstrați că măsura unghiului $\angle AGB$ este de $90°$.



Demonstrație. a) $\left.\begin{array}{l}(AN) \text{ mediană}\\ (BM) \text{ mediană}\\ AM \cap BM = \{G\}\end{array}\right\} \Longrightarrow G$ este centrul de greutate al triunghiului $\triangle ABC \Longrightarrow$

$GM = \dfrac{BM}{3} \iff BM = 3 \cdot GM \iff BM = 9\ cm.$

Pe de altă parte, $BG = \dfrac{2}{3} \cdot BM = \dfrac{2}{3} \cdot 9 = \boxed{6}\ cm.$

b) G este centrul de greutate al triunghiului $\triangle ABC \Longrightarrow (CG)$ este mediană.
Notăm $\{P\} = CG \cap AB$.

$\left.\begin{array}{l}GP = \dfrac{CG}{2}\\ AB = CG\end{array}\right\} \Longrightarrow GP = \dfrac{AB}{2} \Longrightarrow m(\angle AGB) = \boxed{90°}$ (conform reciprocei teoremei medianei).

Barem:

- *a)* Obține $BM = 9\ cm$. . . . . $1p$
- Demonstrează că $BG = 6\ cm$. . . . . $1p$
- *b)* Demonstrează că (CG) este mediană . . . . $1p$
- Obține $GP = \dfrac{AB}{2}$ . . . . $1p$
- Aplică reciproca teoremei medianei și demonstrează că $m(\angle AGB) = 90°$. . . . . $1p$

□

SUBIECTUL I și SUBIECTUL al II-lea

- *Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.*
- *Nu se acordă punctaje intermediare.*

SUBIECTUL al III-lea

- *Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.*
- *Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.*

Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.