Examenul naţional de bacalaureat 2021

Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați media aritmetică a numerelor reale $a=2021-\sqrt{2}$ și $b=2021+\sqrt{2}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+1$. Determinați numărul real m, știind că punctul $A(1,m)$ aparține graficului funcției f.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3\left(\sqrt{x}+3\right)+\log_3\left(\sqrt{x}-3\right)=2$.

5p **4.** Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi, știind că aceasta are exact 16 submulțimi.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(3,0)$, $N(8,3)$ și $P(6,3)$. Determinaţi coordonatele punctului Q, știind că $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MQ}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC în care $\sin 2A\cdot\cos A=\sin A$. Arătați că $A=\frac{\pi}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 1+\log_2 a & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde $a\in(0,+\infty)$.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(1)\right)=1$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice $a\in(0,+\infty)$, matricea $A(a)$ este inversabilă.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice $a\in(0,+\infty)$, $\det\left(A(a)+\left(A(a)\right)^{-1}\right)\geq 8$, unde $\left(A(a)\right)^{-1}$ este inversa matricei $A(a)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy-m(x+y)+m(m+1)$, unde $m\in(0,+\infty)$.

5p **a)** Pentru $m=1$, arătați că $2\circ 2=2$.

5p **b)** Demonstrați că, dacă $2\circ 1=5$, atunci $2\circ 5=1$.

5p **c)** Determinaţi numărul real x, știind că $\left(mx^3\right)\circ\left(-mx^2\right)=m$, pentru orice $m\in(0,+\infty)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-2-4\ln x$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{4\left(x^2+1\right)(x+1)(x-1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Demonstrați că ecuația $f(x)=0$ are exact două soluții distincte în intervalul $(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+\frac{2x}{x^4+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 \left(x^4+1\right) f(x)\,dx=\frac{11}{5}$.

5p **b)** Se consideră $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcției f. Știind că graficul funcției F are asimptotă oblică spre $+\infty$, determinați panta acestei asimptote.

5p **c)** Se consideră funcția $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, primitiva funcției f pentru care $G(0)=0$. Arătați că $\int_0^1 xG(x)\,dx=\frac{1}{3}+\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$m_a=\frac{a+b}{2}=\frac{2021-\sqrt{2}+2021+\sqrt{2}}{2}=$	**3p**
	$=\frac{2\cdot 2021}{2}=2021$	**2p**
2.	$f(1)=m \Leftrightarrow 1-3+1=m$	**3p**
	$m=-1$	**2p**
3.	$\log_3\left(\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)\right)=2$, deci $\left(\sqrt{x}\right)^2-9=3^2$	**3p**
	$x-9=9$, deci $x=18$, care convine	**2p**
4.	O mulțime cu n elemente are 2^n submulțimi	**3p**
	$2^n=16$, deci $n=4$	**2p**
5.	$MNQP$ este paralelogram, deci segmentele MQ și PN au același mijloc	**3p**
	Coordonatele punctului Q sunt $x=11$ și $y=6$	**2p**
6.	În ΔABC, $2\sin A\cdot\cos A\cdot\cos A=\sin A$, deci $\cos^2 A=\frac{1}{2}$	**3p**
	Cum unghiul A este ascuțit, obținem $\cos A=\frac{1}{\sqrt{2}}$, deci $A=\frac{\pi}{4}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A(1)\right)=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1+0+0-0-0-0=1$	**3p**
b)	$\det\left(A(a)\right)=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&a&0\\1+\log_2 a&0&1\end{vmatrix}=a$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$	**3p**
	$\det\left(A(a)\right)\neq 0$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$, deci matricea $A(a)$ este inversabilă	**2p**
c)	$\left(A(a)\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{a}&0\\-1-\log_2 a&0&1\end{pmatrix}$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$	**2p**
	$A(a)+\left(A(a)\right)^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&a+\frac{1}{a}&0\\0&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A(a)+\left(A(a)\right)^{-1}\right)=4\left(a+\frac{1}{a}\right)$ și, cum $a+\frac{1}{a}\geq 2$, obținem că $\det\left(A(a)+\left(A(a)\right)^{-1}\right)\geq 8$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$	**3p**

2.a)	Pentru $m=1$, obținem $x\circ y=xy-(x+y)+2$, deci $2\circ 2=2\cdot 2-(2+2)+2=$ $=4-4+2=2$	**3p** **2p**
b)	$2\circ 1=5\Leftrightarrow 2\cdot 1-m(2+1)+m(m+1)=5\Leftrightarrow m^2-2m-3=0$ și, cum $m\in(0,+\infty)\Rightarrow m=3$ $2\circ 5=2\cdot 5-3(2+5)+3\cdot 4=10-21+12=1$	**3p** **2p**
c)	$-m^2x^5-m\left(mx^3-mx^2\right)+m^2+m=m\Leftrightarrow m^2\left(x^5+x^3-x^2-1\right)=0$ Cum $m\in(0,+\infty)$, obținem $x^3\left(x^2+1\right)-x^2-1=0\Leftrightarrow\left(x^2+1\right)\left(x^3-1\right)=0$, deci $x=1$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=4x^3-\frac{4}{x}=\frac{4x^4-4}{x}=$ $=\frac{4\left(x^4-1\right)}{x}=\frac{4\left(x^2+1\right)(x+1)(x-1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p** **2p**
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$ $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(0,1]$, deci f este descrescătoare pe $(0,1]$ și $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)$, deci f este crescătoare pe $[1,+\infty)$	**2p** **3p**
c)	$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ Cum $f(1)=-1$, f este continuă, f este strict descrescătoare pe $(0,1)$ și f este strict crescătoare pe $(1,+\infty)$, obținem că ecuația $f(x)=0$ are exact două soluții distincte în intervalul $(0,+\infty)$	**2p** **3p**
2.a)	$\int_0^1\left(x^4+1\right)f(x)dx=\int_0^1\left(x^4+1+2x\right)dx=\left.\left(\frac{x^5}{5}+x+x^2\right)\right\|_0^1=$ $=\frac{1}{5}+1+1=\frac{11}{5}$	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F'(x)}{x'}=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2x}{x^4+1}\right)=1$ Asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției F are panta egală cu 1	**3p** **2p**
c)	$G(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x\left(1+\frac{2t}{t^4+1}\right)dt=\left.\left(t+\operatorname{arctg}\left(t^2\right)\right)\right\|_0^x=x+\operatorname{arctg}\left(x^2\right)$, $x\in\mathbb{R}$ $\int_0^1 xG(x)dx=\int_0^1\left(x^2+x\operatorname{arctg}\left(x^2\right)\right)dx=\left.\frac{x^3}{3}\right\|_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1\left(x^2\right)'\operatorname{arctg}\left(x^2\right)dx=\frac{1}{3}+\left.\frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg}\left(x^2\right)\right\|_0^1-\int_0^1\frac{x^3}{x^4+1}dx=$ $=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}-\left.\frac{1}{4}\ln\left(x^4+1\right)\right\|_0^1=\frac{1}{3}+\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2$	**2p** **3p**