Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii
- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $3(4-i)+3i(1+i)=9$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4$. Calculați $(f\circ f)(2)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3\left(x^2-2x+4\right)=1$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 10.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4)$ și $B(3,a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că punctele O, A și B sunt coliniare.

5p **6.** Se consideră $E(x)=\cos x+\cos 2x+\cos 3x$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(x,y)=\begin{pmatrix}x+3y & 4y\\ -2y & x-3y\end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(1,1)\right)=0$.

5p **b)** Demonstrați că, dacă matricea $A(x,y)$ este inversabilă, atunci $|x|\neq|y|$.

5p **c)** Determinați perechile (m,n), de numere întregi, pentru care $A(m,n)\cdot A(-m,n)=I_2$.

2. Pe mulțimea $A=[0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x\circ y=4^{xy}-(1-x-y)$.

5p **a)** Arătați că $2\circ 0=2$.

5p **b)** Arătați că $x\circ\frac{1}{x}\geq 5$, pentru orice $x\in A$, $x\neq 0$.

5p **c)** Demonstrați că, dacă m și n sunt numere naturale impare, atunci $m\circ n$ este număr natural impar.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{3(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $x^3\geq 3\ln x+1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^2\frac{f(x)}{e^x}dx=2$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_{-1}^1\left(f(x)+e^x\right)dx=\frac{e^2+1}{e}$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_{-1-a}^{-1+a}f(x)dx\geq-\frac{2a}{e}$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$.

Examenul naţional de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$3(4-i)+3i(1+i)=12-3i+3i+3i^2=$	**3p**
	$=12-3=9$	**2p**
2.	$f(2)=0$	**2p**
	$f(f(2))=f(0)=-4$	**3p**
3.	$x^2-2x+4=3 \Rightarrow x^2-2x+1=0$	**3p**
	$x=1$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 9 numere divizibile cu 10, deci sunt 9 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{9}{90}=\dfrac{1}{10}$	**1p**
5.	$m_{OA}=2$, $m_{OB}=\dfrac{a}{3}$, unde a este număr real	**2p**
	$m_{OA}=m_{OB} \Leftrightarrow a=6$	**3p**
6.	$E\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos\dfrac{\pi}{2}+\cos\dfrac{3\pi}{4}=$	**2p**
	$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+0+\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1,1)=\begin{pmatrix}4 & 4\\ -2 & -2\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1,1))=\begin{vmatrix}4 & 4\\ -2 & -2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=-8-(-8)=0$	**3p**
b)	$\det(A(x,y))=\begin{vmatrix}x+3y & 4y\\ -2y & x-3y\end{vmatrix}=x^2-y^2$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
	$A(x,y)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A(x,y))\neq 0 \Leftrightarrow x^2-y^2\neq 0$, deci $\lvert x\rvert \neq \lvert y\rvert$	**3p**
c)	$A(m,n)\cdot A(-m,n)=\begin{pmatrix}m+3n & 4n\\ -2n & m-3n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-m+3n & 4n\\ -2n & -m-3n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n^2-m^2 & 0\\ 0 & n^2-m^2\end{pmatrix}$, pentru orice numere întregi m și n	**3p**
	$\begin{pmatrix}n^2-m^2 & 0\\ 0 & n^2-m^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Leftrightarrow n^2-m^2=1 \Leftrightarrow (n-m)(n+m)=1$ și, cum m și n sunt numere întregi, obținem perechile $(0,1)$ sau $(0,-1)$	**2p**

2.a)	$2\circ 0=4^{2\cdot 0}-(1-2-0)=$ $=1-1+2=2$	**3p** **2p**
b)	$x\circ\frac{1}{x}=4^{x\cdot\frac{1}{x}}-1+x+\frac{1}{x}=x+\frac{1}{x}+3=x+\frac{1}{x}-2+5=$ $=\frac{x^2+1-2x}{x}+5=\frac{(x-1)^2}{x}+5\geq 5$, pentru orice $x\in A$, $x\neq 0$	**2p** **3p**
c)	m și n sunt numere naturale impare, deci $m\geq 1$ și $n\geq 1\Rightarrow mn\geq 1$, de unde obținem că 4^{mn} este număr natural par m și n sunt numere naturale impare, deci $m+n-1$ este număr natural impar, de unde obținem că $m\circ n=4^{mn}+m+n-1$ este număr natural impar	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=3x^2-3\cdot\frac{1}{x}=$ $=\frac{3(x^3-1)}{x}=\frac{3(x-1)(x^2+x+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p** **2p**
b)	$f(1)=1$, $f'(1)=0$ Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=1$	**2p** **3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$; pentru $x\in(0,1]$, obținem $f'(x)\leq 0$, deci f este descrescătoare pe $(0,1]$ și pentru $x\in[1,+\infty)$, obținem $f'(x)\geq 0$, deci f este crescătoare pe $[1,+\infty)$ $f(x)\geq f(1)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$ și, cum $f(1)=1$, obținem că $x^3\geq 3\ln x+1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**3p** **2p**
2.a)	$\int_0^2\frac{f(x)}{e^x}dx=\int_0^2 x\,dx=\left.\frac{x^2}{2}\right\|_0^2=$ $=2-0=2$	**3p** **2p**
b)	$\int_{-1}^1\left(f(x)+e^x\right)dx=\int_{-1}^1\left(xe^x+e^x\right)dx=\int_{-1}^1\left(xe^x\right)'dx=\left.xe^x\right\|_{-1}^1=$ $=e+e^{-1}=\frac{e^2+1}{e}$	**3p** **2p**
c)	$f'(x)=(x+1)e^x$, deci $f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$ și, cum $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,-1]$ și $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)$, obținem că $f(x)\geq f(-1)$, pentru orice număr real x $f(-1)=-\frac{1}{e}$, deci $\int_{-1-a}^{-1+a}f(x)dx\geq -\frac{1}{e}\int_{-1-a}^{-1+a}dx=-\frac{1}{e}\left.x\right\|_{-1-a}^{-1+a}=-\frac{2a}{e}$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$	**2p** **3p**