

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică $M_{tehnologic}$

Varianta 4

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați termenul a_3 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, știind că $a_1 = 4$ și rația este $r = 5$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x - 1$. Arătați că $f(0) = f(1)$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4(3x+4) = \log_4 16$.
- 5p** 4. După o scumpire cu 25%, un produs costă 350 de lei. Determinați prețul produsului înainte de scumpire.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-4,1)$ și $B(a,b)$, unde a și b sunt numere reale. Determinați numerele reale a și b , știind că punctul O este mijlocul segmentului AB .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul isoscel ABC , dreptunghic în A . Știind că aria triunghiului ABC este egală cu 8, determinați lungimea laturii AB .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ și $B(x) = \begin{pmatrix} x & -2x \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det A = 3$.
- 5p** b) Arătați că $3B(2) + B(6) = 4B(3)$.
- 5p** c) Determinați numărul real x pentru care $(B(-x) - B(x)) \cdot (B(-x) + B(x)) = A + B(3)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = 3x + 4y - 25$.
- 5p** a) Arătați că $3 \circ 4 = 0$.
- 5p** b) Determinați numărul real x pentru care $(2x) \circ x = 5$.
- 5p** c) Determinați numerele întregi m pentru care $m^2 \circ 1 \geq 1 \circ m^2$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{3x+1}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{2}{(3x+1)^2}$, $x \in \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$.
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Arătați că funcția f este concavă.
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + \ln x - 1$.
- 5p** a) Arătați că $\int_1^4 (f(x) - \ln x + 1) dx = 21$.
- 5p** b) Arătați că $\int_2^4 \frac{x}{f(x) - \ln x} dx = \frac{1}{2} \ln 5$.
- 5p** c) Determinați $a \in (1, +\infty)$ pentru care $\int_1^a \frac{f(x)}{x^2} dx = \frac{a - \ln a}{a}$.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 4

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$a_3 = 4 + 2 \cdot 5 =$ $= 4 + 10 = 14$	3p 2p
2.	$f(0) = -1$ $f(1) = -1$, deci $f(0) = f(1)$	2p 3p
3.	$3x + 4 = 16$ $x = 4$, care convine	3p 2p
4.	$x + \frac{25}{100} \cdot x = 350$, unde x este prețul produsului înainte de scumpire Prețul produsului înainte de scumpire este 280 de lei	3p 2p
5.	$O(0,0)$ este mijlocul segmentului AB , deci $\frac{-4+a}{2} = 0$ și $\frac{1+b}{2} = 0$ $a = 4$, $b = -1$	3p 2p
6.	$A_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2}$ $\frac{AB^2}{2} = 8 \Leftrightarrow AB^2 = 16$, de unde obținem $AB = 4$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - (-2) \cdot (-1) =$ $= 5 - 2 = 3$	3p 2p
b)	$B(2) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ și $B(6) = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow 3B(2) + B(6) = \begin{pmatrix} 12 & -24 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} =$ $= 4 \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 4B(3)$	3p 2p
c)	$(B(-x) - B(x)) \cdot (B(-x) + B(x)) = \begin{pmatrix} -2x & 4x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x & -8x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real x Cum $A + B(3) = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, obținem $x = 1$	3p 2p
2.a)	$3 \circ 4 = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 - 25 =$ $= 25 - 25 = 0$	3p 2p

b)	$(2x) \circ x = 10x - 25$, pentru orice număr real x	3p
	$10x - 25 = 5$, de unde obținem $x = 3$	2p
c)	$m^2 \circ 1 = 3m^2 - 21$ și $1 \circ m^2 = 4m^2 - 22$, pentru orice număr întreg m	2p
	$3m^2 - 21 \geq 4m^2 - 22 \Leftrightarrow -m^2 + 1 \geq 0$, deci $m \in [-1, 1]$ și, cum m este număr întreg, obținem $m = -1$ sau $m = 0$ sau $m = 1$	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{2(3x+1) - 2x \cdot 3}{(3x+1)^2} =$	3p
	$= \frac{6x+2-6x}{(3x+1)^2} = \frac{2}{(3x+1)^2}$, $x \in \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$	2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{3x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x\left(3 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3 + \frac{1}{x}} = \frac{2}{3}$	3p
	Dreapta de ecuație $y = \frac{2}{3}$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	2p
c)	$f''(x) = -\frac{12}{(3x+1)^3}$, $x \in \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$	3p
	$f''(x) \leq 0$, pentru orice $x \in \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$, deci funcția f este concavă	2p
2.a)	$\int_1^4 (f(x) - \ln x + 1) dx = \int_1^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big _1^4 =$	3p
	$= \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = 21$	2p
b)	$\int_2^4 \frac{x}{f(x) - \ln x} dx = \int_2^4 \frac{x}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \int_2^4 \frac{(x^2 - 1)'}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 1) \Big _2^4 =$	3p
	$= \frac{1}{2} \ln 15 - \frac{1}{2} \ln 3 = \frac{1}{2} \ln 5$	2p
c)	$\int_1^a \frac{f(x)}{x^2} dx = \int_1^a \left(1 + \frac{\ln x}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right) dx = \int_1^a 1 dx + \int_1^a \left(-\frac{1}{x}\right)' \ln x dx - \int_1^a \frac{1}{x^2} dx =$	3p
	$= x \Big _1^a - \frac{1}{x} \ln x \Big _1^a + \int_1^a \frac{1}{x^2} dx - \int_1^a \frac{1}{x^2} dx = a - 1 - \frac{\ln a}{a}$, pentru orice $a \in (1, +\infty)$	
	$a - 1 - \frac{\ln a}{a} = \frac{a - \ln a}{a}$, de unde obținem $a = 2$, care convine	2p