

CONCURSUL NAȚIONAL DE OCUPARE A POSTURILOR DIDACTICE/CATEDRELOR
VACANTE/REZERVATE DIN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR

21 iulie 2021

Probă scrisă
MATEMATICĂ

Varianta 2

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de patru ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1. Se consideră numărul complex a și expresia $E(z) = az - 5\bar{z}$, unde \bar{z} este conjugatul numărului complex z .
- 5p a) Pentru $a = 3 + 4i$, arătați că $E(2 - i) = 0$.
- 5p b) Pentru $a = 3 - i$, determinați numărul complex z pentru care $E(z) = 15$.
- 5p c) Demonstrați că, dacă $|a| \neq 5$ și z_1, z_2 sunt numere complexe astfel încât $E(z_1) = E(z_2)$, atunci $z_1 = z_2$.
2. Punctul I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC și punctul N este al doilea punct de intersecție a dreptei CI cu cercul circumscris triunghiului ABC .
- 5p a) Arătați că măsura unghiului AIN este egală cu jumătate din suma măsurilor unghiurilor BAC și ACB .
- 5p b) Demonstrați că triunghiul ANI este isoscel.
- 5p c) Știind că $AI \perp IM$, unde M este mijlocul laturii AC , demonstrați că $CI = 2IN$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră x_1, x_2 și x_3 rădăcinile polinomului $f = X^3 + X^2 + mX + 1$, unde m este număr real.
- 5p a) Arătați că $f(-1) + f(1) = 4$, pentru orice număr real m .
- 5p b) Determinați numărul real m pentru care $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.
- 5p c) Demonstrați că, pentru $m \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, polinomul f are o singură rădăcină număr real.
2. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x(x^5 + 6)}$.
- 5p a) Arătați că $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^7 f'(x)) = -6$.
- 5p b) Arătați că $f(x) < \frac{1}{7}$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$.
- 5p c) Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = 2$ are aria egală cu $\frac{1}{30} \ln \frac{112}{19}$.

Următoarea secvență face parte din programa școlară de matematică pentru clasa a VIII-a.

Competențe specifice și exemple de activități de învățare

Clasa a VIII-a
<p>1.4. Identificarea unor figuri plane sau a unor elemente caracteristice acestora în configurații spațiale date</p> <ul style="list-style-type: none">- Identificarea, construcția, notarea și citirea unor drepte concurente/paralele/necoplanare în configurații spațiale, cu exemplificare și în realitatea înconjurătoare- Identificarea, în configurații spațiale simple și în realitate, a pozițiilor relative ale unei drepte față de un plan- Identificarea pozițiilor relative a două plane în configurații spațiale simple și în realitatea înconjurătoare- Recunoașterea figurilor geometrice obținute în urma secționării unei piramide sau a unei prisme cu un plan paralel cu baza
<p>2.4. Reprezentarea, prin desen sau prin modele, a unor configurații spațiale date</p> <ul style="list-style-type: none">- Reprezentarea prin desen sau prin modele a unor configurații spațiale în/din contexte reale- Utilizarea instrumentelor geometrice și a softurilor matematice pentru a desena diferite configurații spațiale- Utilizarea diferitelor mijloace didactice pentru a modela rezultate asociate relațiilor de paralelism și perpendicularitate în spațiu- Utilizarea convențiilor de notare și citire a configurațiilor spațiale- Reprezentarea, prin desen, a proiecțiilor și a unghiurilor- Clasificarea prismelor/piramidelor după forma bazei- Construirea înălțimii unei prisme sau a unei piramide
<p>3.4. Folosirea unor proprietăți de paralelism sau perpendicularitate pentru analizarea pozițiilor relative ale dreptelor și planelor</p> <ul style="list-style-type: none">- Utilizarea măsurilor unghiurilor și a distanțelor pentru stabilirea pozițiilor relative între drepte și/sau plane- Determinarea paralelismului în spațiu, între drepte și/sau plane cu ajutorul proprietăților relațiilor de paralelism și de perpendicularitate în configurații simple- Determinarea perpendicularității în spațiu, între drepte și/sau plane cu ajutorul proprietăților relațiilor de paralelism și de perpendicularitate în configurații simple
<p>4.4. Descrierea în limbaj matematic a elementelor unei configurații geometrice</p> <ul style="list-style-type: none">- Construirea unor configurații geometrice cu drepte și plane aflate în relații de paralelism sau perpendicularitate- Verificarea validității unor afirmații legate de pozițiile relative ale dreptelor și/sau ale planelor prin exemple și contraexemplu- Identificarea și utilizarea axiomelor, teoremelor directe/reciproce pentru rezolvarea de probleme în configurații spațiale simple- Evidențierea unor aspecte particulare sau a unor aspecte ce pot fi generalizate, referitoare la configurații spațiale
<p>5.4. Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea descrierii unor configurații spațiale și a calculării unor elemente metrice</p> <ul style="list-style-type: none">- Argumentarea demersului de rezolvare a unei probleme de geometrie în spațiu- Adecvarea reprezentărilor configurațiilor spațiale la cerințele problemelor, în vederea optimizării rezolvării problemei- Optimizarea rezolvării de probleme prin utilizarea instrumentelor interactive de realizare a reprezentărilor geometrice (softuri matematice)- Analizarea/interpretarea unor situații din realitatea înconjurătoare și transpunerea lor în probleme de geometrie în spațiu
<p>6.4. Modelarea unor situații practice în limbaj geometric, utilizând configurații spațiale</p> <ul style="list-style-type: none">- Formularea de ipoteze și de concluzii în probleme cu conținut practic legate de proiecții pe plan a

- unor puncte, drepte, segmente*
- Verificarea validității unor rezultate, în cazul înlocuirii unor părți din ipoteză cu părți din concluzie
 - Transpunerea unor situații date în limbajul specific geometriei, interpretarea rezultatelor obținute și corelarea răspunsului geometric cu restricțiile impuse de realitatea înconjurătoare

[...]

Domeniu de conținut	Conținuturi
Geometrie	4. ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU <ul style="list-style-type: none">• Puncte, drepte, plane: convenții de notare, reprezentări, determinarea drepte, determinarea planului, relații între puncte, drepte și plane• Corpuri geometrice: piramida, piramida regulată, tetraedrul regulat; prismă dreaptă, paralelipiped dreptunghic, cub; cilindru circular drept; con circular drept; reprezentare, elemente caracteristice, desfășurări• Paralelism: drepte paralele, unghiul a două drepte, dreaptă paralelă cu un plan, plane paralele, aplicații: secțiuni paralele cu baza în corpurile geometrice studiate; trunchiul de piramidă și trunchiul de con circular drept (descriere și reprezentare)• Perpendicularitate: drepte perpendiculare, dreaptă perpendiculară pe un plan, aplicații: înălțimea unei piramide, înălțimea unui con circular drept, distanța dintre două plane paralele, înălțimea prisme drepte, a paralelipipedului dreptunghic, a cilindrului circular drept, a trunchiului de piramidă/con circular drept; plane perpendiculare, aplicații: secțiuni diagonale, secțiuni axiale în corpurile studiate• Proiecții de puncte, de segmente și de drepte pe un plan; unghiul dintre o dreaptă și un plan, aplicație: lungimea proiecției unui segment; unghi diedru, unghi plan corespunzător diedrului; unghiul a două plane; plane perpendiculare• Teorema celor trei perpendiculare; calculul distanței de la un punct la o dreaptă; calculul distanței de la un punct la un plan; calculul distanței dintre două plane paralele

Notă: Conținuturile vor fi abordate din perspectiva competențelor specifice. Activitățile de învățare sugerate oferă o imagine posibilă privind contextele de formare/dezvoltare a acestor competențe.

(Programa școlară pentru disciplina Matematică, OMEN nr. 3393/28.02.2017)

Folosind informațiile din secvența de mai sus, în vederea evaluării formării/dezvoltării competențelor specifice precizate, elaborați o probă de evaluare la finalul unității de învățare „Elemente ale geometriei în spațiu. Paralelism”, care să cuprindă 6 itemi: *un item de completare, un item cu răspuns scurt, un item de tip pereche, un item de tip alegere multiplă, un item de tip întrebare structurată și un item de tip rezolvare de probleme.*

Notă. Pentru fiecare dintre itemii elaborați se punctează menționarea competenței specifice evaluate, respectarea formatului itemului, elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) și corectitudinea științifică a informației de specialitate.

**CONCURSUL NAȚIONAL DE OCUPARE A POSTURILOR DIDACTICE/CATEDRELOR
VACANTE/REZERVATE DIN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR**

21 iulie 2021

**Probă scrisă
MATEMATICĂ**

Varianta 2

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

- Se punctează orice modalitate de rezolvare corectă a cerințelor, în limita punctajului maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	a) $E(2-i) = (3+4i)(2-i) - 5(2+i) =$ $= 6 - 3i + 8i + 4 - 10 - 5i = 0$	3p 2p
	b) $E(z) = (3-i)z - 5\bar{z}$, deci, pentru $z = x + iy$, obținem $(3-i)(x+iy) - 5(x-iy) = 15$, unde x și y sunt numere reale $(3x + y - 5x) + i(3y - x + 5y) = 15$, de unde obținem $x = -8$ și $y = -1$, deci $z = -8 - i$	2p 3p
	c) $az_1 - 5\bar{z}_1 = az_2 - 5\bar{z}_2$, deci $a(z_1 - z_2) = 5(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)$ $ a(z_1 - z_2) = 5(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) \Rightarrow a z_1 - z_2 = 5 \bar{z}_1 - \bar{z}_2 $ și, cum $ \bar{z}_1 - \bar{z}_2 = \overline{z_1 - z_2} = z_1 - z_2 $, obținem $ a z_1 - z_2 = 5 z_1 - z_2 $, de unde, cum $ a \neq 5$, obținem $ z_1 - z_2 = 0$, deci $z_1 = z_2$	2p 3p
2.	a) Unghiul $\sphericalangle AIN$ este unghi exterior triunghiului AIC , deci $\sphericalangle AIN = \sphericalangle CAI + \sphericalangle ACI$ Cum I este centrul cercului înscris în $\triangle ABC$, semidreptele AI și CI sunt bisectoarele unghiurilor BAC , respectiv ACB , deci $\sphericalangle AIN = \frac{1}{2}\sphericalangle BAC + \frac{1}{2}\sphericalangle ACB = \frac{1}{2}(\sphericalangle BAC + \sphericalangle ACB)$	2p 3p
	b) $\sphericalangle NAB = \frac{1}{2}\widehat{NB} = \sphericalangle NCB$ $\sphericalangle NAI = \sphericalangle NAB + \sphericalangle BAI = \frac{1}{2}\sphericalangle ACB + \frac{1}{2}\sphericalangle BAC$, deci $\sphericalangle NAI = \sphericalangle AIN$, de unde obținem că triunghiul ANI este isoscel	2p 3p
	c) $\triangle ANI$ este isoscel cu vârful în N , deci $NP \perp AI$, unde P este mijlocul segmentului AI și, cum $AI \perp IM$, obținem că $NP \parallel IM$, deci PQ este linie mijlocie în $\triangle AIM$, unde Q este punctul de intersecție a dreptelor NP și AC Q este mijlocul segmentului AM și M este mijlocul segmentului AC , deci $\frac{CM}{MQ} = 2$ și, cum $NQ \parallel IM$, obținem $\frac{CI}{IN} = \frac{CM}{MQ} = 2$, deci $CI = 2IN$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.	a) $f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - m + 1 = -m + 1$, pentru orice număr real m	2p
	$f(1) = 1^3 + 1^2 + m + 1 = m + 3$, deci $f(-1) + f(1) = 4$, pentru orice număr real m	3p
	b) $x_1 + x_2 + x_3 = -1$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = m$, pentru orice număr real m $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 1 - 2m \Rightarrow 1 - 2m = 1$, deci $m = 0$	2p 3p

	<p>c) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} = \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_1x_3} + \frac{1}{x_2x_3}\right) = \left(\frac{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3}{x_1x_2x_3}\right)^2 - \frac{2(x_1 + x_2 + x_3)}{x_1x_2x_3} =$ $= m^2 - 2 < 0$, pentru orice $m \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$</p> <p>Cum $f \in \mathbb{R}[X]$ și are gradul egal cu 3, iar numerele x_1, x_2 și x_3 nu sunt toate reale, obținem că polinomul f are o singură rădăcină număr real</p>	<p>3p</p> <p>2p</p>
2.	<p>a) $f'(x) = -\frac{6x^5 + 6}{(x^6 + 6x)^2}$, $x \in (0, +\infty)$</p> <p>$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^7 f'(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-(6x^{12} + 6x^7)}{(x^6 + 6x)^2} = -6$</p>	<p>3p</p> <p>2p</p>
	<p>b) $f'(x) < 0$, pentru orice $x \in [1, +\infty)$, deci f este strict descrescătoare pe $[1, +\infty)$, de unde obținem $f(x) < f(1)$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$</p> <p>$f(1) = \frac{1}{7}$, deci $f(x) < \frac{1}{7}$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$</p>	<p>3p</p> <p>2p</p>
	<p>c) $\mathcal{A} = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \frac{1}{x(x^5 + 6)} dx = \int_1^2 \frac{x^4}{x^5(x^5 + 6)} dx = \frac{1}{5} \int_1^2 \frac{1}{6\left(\frac{1}{x^5} - \frac{1}{x^5 + 6}\right)} (x^5)' dx =$ $= \frac{1}{30} \left(\ln x^5 - \ln(x^5 + 6) \right) \Big _1^2 = \frac{1}{30} (\ln 32 - \ln 38 - \ln 1 + \ln 7) = \frac{1}{30} \ln \frac{112}{19}$</p>	<p>3p</p> <p>2p</p>

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

<p><i>Itemul de completare elaborat:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate - respectarea formatului itemului - elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) - corectitudinea științifică a informației de specialitate 	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p>
<p><i>Itemul cu răspuns scurt elaborat:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate - respectarea formatului itemului - elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) - corectitudinea științifică a informației de specialitate 	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p>
<p><i>Itemul de tip pereche elaborat:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate - respectarea formatului itemului - elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) - corectitudinea științifică a informației de specialitate 	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p>
<p><i>Itemul de tip alegere multiplă elaborat:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate - respectarea formatului itemului - elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) - corectitudinea științifică a informației de specialitate 	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p>
<p><i>Itemul de tip întrebare structurată elaborat:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate - respectarea formatului itemului - elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) - corectitudinea științifică a informației de specialitate 	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p>

<i>Itemul de tip rezolvare de probleme elaborat:</i>	
- menționarea competenței specifice evaluate	1p
- respectarea formatului itemului	1p
- elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare)	1p
- corectitudinea științifică a informației de specialitate	2p