

Concurs de admitere la Facultatea de Matematică și Informatică
Sesiunea Iulie 2021
Subiect la Matematică

Subiectul 1. Se consideră mulțimea

$$\mathcal{M} = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1+x & -x & 0 \\ -x & 1+x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}.$$

- Arătați că $A(x) \cdot A(y) = A(y) \cdot A(x) = A(2xy + x + y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
- Determinați $x_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât $A(x) \cdot A(x_0) = A(x_0)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- Determinați matricea $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$,

$$P = A\left(-\frac{1}{2021}\right) \cdot A\left(-\frac{1}{2020}\right) \dots A\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot A(-1).$$

Subiectul 2. Fie $A = (-1, 1)$ și $f : \mathbb{R} \rightarrow A$ funcția definită prin

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}, \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

De asemenea, considerăm legea de compoziție $*$ definită pe A prin

$$x * y = \frac{x + y}{1 + xy}, \quad \text{pentru orice } x, y \in A.$$

- Arătați că $(A, *)$ este un grup comutativ.
- Arătați că funcția f este un izomorfism de la $(\mathbb{R}, +)$ la $(A, *)$.
- Rezolvați în A ecuația

$$x * \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

Subiectul 3. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{x-1}$.

- Arătați că f este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ și calculați f' .
- Este funcția f monotonă pe tot domeniul de definiție? Justificați răspunsul.
- Arătați că pentru orice $x > 1$ avem $\frac{\pi}{4} < f(x) < \frac{\pi}{2}$.

Subiectul 4. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - x + 1)e^{-x}$.

- Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = -(x^2 + ax + b)e^{-x}$ să fie o primitivă a funcției f .
- Determinați primitiva, G , a funcției f , cu proprietatea că $G(0) = -1$.
- Arătați că orice primitivă a funcției f este convexă pe intervalul $[1, 2]$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii și se notează cu note cuprinse între 1 și 10.

Timp de lucru: 3 ore.