

EXAMENUL NAȚIONAL DE DEFINITIVARE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNT  
14 iulie 2021

Probă scrisă  
MATEMATICĂ

Varianta 3

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de patru ore.

SUBIECTUL I

(60 de puncte)

1. Se consideră  $x_1$  și  $x_2$  soluțiile ecuației  $x^2 + x + m = 0$ , unde  $m$  este număr real nenul.
- 7p a) Arătați că, dacă una dintre soluțiile ecuației este număr întreg, atunci numărul  $m$  este întreg, divizibil cu 2.
- 8p b) Determinați numărul real nenul  $m$  pentru care  $\frac{x_1^2 + 1}{x_1^3 + x_1^2} + \frac{x_2^2 + 1}{x_2^3 + x_2^2} = -\frac{1}{4}$ .
2. Se consideră triunghiul  $ABC$  și semidreapta  $AD$ , bisectoarea unghiului  $BAC$ ,  $D \in BC$ . Punctul  $M$  este mijlocul segmentului  $AD$ , iar punctele  $N$  și  $P$  sunt proiecțiile punctului  $M$  pe dreptele  $AB$ , respectiv  $AC$ .
- 7p a) Arătați că segmentele  $AN$  și  $AP$  sunt congruente.
- 8p b) Demonstrați că, dacă  $AC = 3AN$ , atunci triunghiul  $CDN$  este isoscel.
3. Pe inelul  $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$  se definește legea de compoziție asociativă  $x * y = \hat{2}xy + \hat{6}x + \hat{6}y + \hat{7}$ .
- 7p a) Arătați că  $x * y = \hat{2}(x + \hat{3})(y + \hat{3}) + \hat{5}$ , pentru orice  $x, y \in \mathbb{Z}_8$ .
- 8p b) Determinați  $x \in \mathbb{Z}_8$  pentru care  $x * x * x * x = x$ .
4. Se consideră funcția  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x}{x^3 + 2}$ .
- 7p a) Arătați că funcția  $f$  este strict descrescătoare pe  $(1, +\infty)$ .
- 8p b) Demonstrați că  $\int_0^1 f^2(x) dx = \frac{1}{18}$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

Următoarea secvență face parte din programa școlară de matematică pentru clasa a VIII-a.

Competențe specifice și exemple de activități de învățare

| Clasa a VIII-a   |
|--|
| <b>1.3. Identificarea unor dependențe funcționale în diferite situații date</b> <ul style="list-style-type: none"><li>- Completarea unui șir numeric când regula de construire este dată explicit</li><li>- Determinarea unei reguli de construire a unui șir când se cunosc câțiva termeni</li><li>- Identificarea unor dependențe funcționale în diferite situații concrete</li><li>- Exprimarea unor dependențe funcționale în diverse forme (tabele, grafice, formule)</li></ul> |
| <b>2.3. Descrierea unei dependențe funcționale într-o situație dată, folosind diagrame, tabele sau formule</b> <ul style="list-style-type: none"><li>- Determinarea elementelor unei funcții (domeniu de definiție, mulțimea în care funcția ia valori, lege de corespondență)</li><li>- Corelarea elementelor unor funcții cu situații practice</li><li>- Sortarea și organizarea unor date după criterii de tip dependență funcțională</li></ul>                                   |
| <b>3.3. Reprezentarea în diverse moduri a unor funcții cu scopul caracterizării acestora</b> <ul style="list-style-type: none"><li>- Reprezentarea grafică a unor funcții numerice</li></ul>   |

|  |
|--|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>- Determinarea unor puncte care aparțin graficului unei funcții numerice</li> <li>- Determinarea intersecțiilor graficului unei funcții numerice cu axele de coordonate</li> <li>- Determinarea indicatorilor tendinței centrale a unui set de date</li> </ul>  |
| <p><b>4.3. Utilizarea unui limbaj specific pentru formularea unor opinii referitoare la diferite dependențe funcționale</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Formularea unor presupuneri matematice despre o funcție/despre regula de construire a unui șir</li> <li>- Utilizarea unor exemple sau contraexemplu pentru a susține un argument în contextul funcțiilor</li> <li>- Utilizarea unui limbaj specific pentru a interpreta un grafic sau o dependență funcțională</li> <li>- Ilustrarea grafică a indicatorilor tendinței centrale a unui set de date</li> </ul> |
| <p><b>5.3. Analizarea unor funcții în context intra și interdisciplinar</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Determinarea coordonatelor punctului de intersecție a graficelor a două funcții și interpretarea acestora ca soluție a unui sistem de două ecuații de gradul I cu două necunoscute</li> <li>- Determinarea unei funcții care îndeplinește condiții date</li> <li>- Verificarea coliniarității a trei sau a mai multor puncte, cunoscând coordonatele lor</li> </ul>   |
| <p><b>6.3. Modelarea cu ajutorul funcțiilor a unor fenomene din viața reală</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Rezolvarea unor probleme din cotidian cu ajutorul funcțiilor</li> <li>- Interpretarea unor fenomene din cotidian descrise cu ajutorul funcțiilor</li> <li>- Interpretarea unei reprezentări grafice a indicatorilor tendinței centrale a unui set de date</li> </ul>  |

[...]

| Domeniu de conținut  | Conținuturi   |
|--|---|
| <p><b>Funcții.</b><br/><b>Organizarea datelor și probabilități</b></p> | <p><b>3. FUNCȚII</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Funcții definite pe mulțimi finite, exprimate cu ajutorul unor diagrame, tabele, formule; graficul unei funcții, reprezentarea geometrică a graficului unor funcții numerice</li> <li>• Funcții de forma <math>f : D \rightarrow \mathbb{R}</math>, <math>f(x) = ax + b</math>, unde <math>a</math> și <math>b</math> sunt numere reale și <math>D</math> este o mulțime finită de numere reale sau un interval nedegenerat; interpretare geometrică; lecturi grafice</li> <li>• Elemente de statistică: indicatorii tendinței centrale (frecvență, medie, mediană, mod și amplitudine a unui set de date)</li> </ul> |

**Notă:** Conținuturile vor fi abordate din perspectiva competențelor specifice. Activitățile de învățare sugerate oferă o imagine posibilă privind contextele de formare/dezvoltare a acestor competențe.

(Programa școlară pentru disciplina Matematică, OMEN nr. 3393/28.02.2017)

Pentru o evaluare la finalul unității de învățare „Funcții”, a trei dintre competențele specifice precizate în secvența de mai sus, elaborați trei itemi: un *item de tip alegere multiplă*, un *item de tip întrebare structurată* și un *item de tip rezolvare de probleme*.

În elaborarea itemilor se vor avea în vedere următoarele aspecte:

- menționarea competenței specifice evaluate;
- respectarea formatului fiecărui item elaborat;
- elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) pentru fiecare dintre itemii elaborați;
- corectitudinea științifică a informației de specialitate.

**EXAMENUL NAȚIONAL DE DEFINITIVARE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNT**  
**14 iulie 2021**

**Probă scrisă**  
**MATEMATICĂ**

**Varianta 3**

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

- Se punctează orice modalitate de rezolvare corectă a cerințelor, în limita punctajului maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(60 de puncte)**

|           |   |   |
|-----------|---|---|
| <b>1.</b> | a) Dacă $x_1 = k$ , $k \in \mathbb{Z}$ , este soluție a ecuației, atunci $k^2 + k + m = 0 \Rightarrow m = -k^2 - k$ și, cum $k \in \mathbb{Z}$ , obținem $m \in \mathbb{Z}$<br>$m = -k(k+1)$ , deci numărul întreg $m$ este divizibil cu 2  | <b>4p</b>   |
|           | b) $x_1^3 + x_1^2 = -mx_1$ , $x_2^3 + x_2^2 = -mx_2$ , $x_1 + x_2 = -1$ , $m \in \mathbb{R}^*$  | <b>3p</b>   |
|           | $x_1 x_2 = m \Rightarrow \frac{x_1^2 + 1}{x_1^3 + x_1^2} + \frac{x_2^2 + 1}{x_2^3 + x_2^2} = -\frac{1}{m} \left( \frac{x_1^2 + 1}{x_1} + \frac{x_2^2 + 1}{x_2} \right) = \frac{m+1}{m^2}$ , $m \in \mathbb{R}^*$  | <b>3p</b>   |
|           | $\frac{m+1}{m^2} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow m^2 + 4m + 4 = 0$ , de unde obținem $m = -2$  | <b>2p</b>   |
| <b>2.</b> | a) $AD$ este bisectoarea unghiului $BAC$ , deci $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD$<br>Triunghiurile $MAN$ și $MAP$ sunt dreptunghice, au latura $AM$ comună și $\sphericalangle MAN \equiv \sphericalangle MAP$<br>$\Delta MAN \equiv \Delta MAP$ , de unde obținem $AN \equiv AP$  | <b>2p</b><br><b>3p</b><br><b>2p</b>   |
|           | b) Dacă $DQ \perp AC$ , $Q \in AC$ , obținem că $MP \parallel DQ$ și, cum $AM = MD$ , obținem că $MP$ este linie mijlocie în $\Delta ADQ$ , deci punctul $P$ este mijlocul segmentului $AQ$<br>$AP = PQ$ , $AN = AP$ și $AC = 3AN$ , deci $PQ = QC$ și, cum $DQ \perp AC$ , obținem că triunghiul $DPC$ este isoscel, deci $DP = DC$<br>$\Delta ADN \equiv \Delta ADP$ , deci $DN = DP$ , de unde obținem că $DN = DC$ , deci triunghiul $CDN$ este isoscel | <b>3p</b><br><b>3p</b><br><b>2p</b>   |
|           | <b>3.</b>   | a) $x * y = \hat{2}xy + \hat{6}x + \hat{6}y + \hat{2} + \hat{5} =$<br>$= \hat{2}x(y + \hat{3}) + \hat{6}(y + \hat{3}) + \hat{5} = (y + \hat{3})(\hat{2}x + \hat{6}) + \hat{5} = \hat{2}(x + \hat{3})(y + \hat{3}) + \hat{5}$ , pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}_8$ |
|           | b) $x * x = \hat{2}(x + \hat{3})^2 + \hat{5}$ , pentru orice $x \in \mathbb{Z}_8$<br>$x * x * x * x = \hat{8}(x + \hat{3})^4 + \hat{5} = \hat{0} + \hat{5} = \hat{5}$ , pentru orice $x \in \mathbb{Z}_8$<br>$x * x * x * x = x \Leftrightarrow x = \hat{5}$  | <b>3p</b><br><b>3p</b><br><b>2p</b>   |
| <b>4.</b> | a) $f'(x) = \frac{x^3 + 2 - 3x^3}{(x^3 + 2)^2} = \frac{2(1 - x^3)}{(x^3 + 2)^2}$ , $x \in [0, +\infty)$   | <b>4p</b>   |
|           | Cum $x^3 > 1$ , pentru orice $x > 1$ , obținem că $f'(x) < 0$ , pentru orice $x \in (1, +\infty)$ , deci funcția $f$ este strict descrescătoare pe $(1, +\infty)$   | <b>3p</b>   |

|   |           |
|---|-----------|
| $\mathbf{b)} \int_0^1 f^2(x) dx = \int_0^1 \frac{x^2}{(x^3+2)^2} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{3x^2}{(x^3+2)^2} dx =$ | <b>3p</b> |
| $= \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{(x^3+2)'}{(x^3+2)^2} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{-1}{x^3+2} \Big _0^1 =$                 | <b>3p</b> |
| $= \frac{1}{3} \left( -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{18}$  | <b>2p</b> |

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

|  |   |
|--|---|
| <p><i>Itemul de tip alegere multiplă elaborat:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- menționarea competenței specifice evaluate</li> <li>- respectarea formatului itemului</li> <li>- elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare)</li> <li>- corectitudinea științifică a informației de specialitate</li> </ul>      | <p><b>2p</b></p> <p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p> <p><b>3p</b></p> |
| <p><i>Itemul de tip întrebare structurată elaborat:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- menționarea competenței specifice evaluate</li> <li>- respectarea formatului itemului</li> <li>- elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare)</li> <li>- corectitudinea științifică a informației de specialitate</li> </ul> | <p><b>2p</b></p> <p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p> <p><b>3p</b></p> |
| <p><i>Itemul de tip rezolvare de probleme elaborat:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- menționarea competenței specifice evaluate</li> <li>- respectarea formatului itemului</li> <li>- elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare)</li> <li>- corectitudinea științifică a informației de specialitate</li> </ul> | <p><b>2p</b></p> <p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p> <p><b>3p</b></p> |