Rezolvarea problemelor de la definitivat matematică 2021

Subiectul I :

1. Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2+x+m=0$, unde m este număr real nenul.

a) Arătați că, dacă una dintre soluțiile ecuației este număr întreg, atunci numărul m este întreg, divizibil cu 2.

b) Determinați numărul real nenul m pentru care $\frac{x_1^2+1}{x_1^3+x_1^2}+\frac{x_2^2+1}{x_2^3+x_2^2}=-\frac{1}{4}$.

Rezolvare :

a) Presupunem că $x_1 \in \mathbb{Z}$ este rădăcină :

$=> \ x_1^2+x_1+m=0 \quad => \ m=-x_1^2-x_1$

$=> \ m=-x_1(x_1+1)$

Evident dacă $x_1 \in \mathbb{Z} \ => m \in \mathbb{Z}$

În plus se observă că x_1 şi x_1+1 sunt numere întregi consecutive şi se ştie că produsul a două numere întregi consecutive este divizibil cu 2 (la două numere întregi consecutive avem automat un număr par) iar semnul minus nu schimbă acest rezultat .

b) $=> \frac{x_1^2+1}{x_1(x_1^2+x_1)} + \frac{x_2^2+1}{x_2(x_2^2+x_2)} = -\frac{1}{4}$

Dacă x_1 este rădăcină $=> x_1^2 + x_1 + m = 0$

$=> x_1^2 + x_1 = -m$

Dacă x_2 este rădăcină $=> x_2^2 + x_2 + m = 0$

$=> x_2^2 + x_2 = -m$

$=> \frac{x_1^2+1}{-mx_1} + \frac{x_2^2+1}{-mx_2} = -\frac{1}{4} \quad \Big| \cdot (-1)$

$$=> \frac{x_1^2+1}{mx_1}+\frac{x_2^2+1}{mx_2}=\frac{1}{4} \quad => \frac{1}{m}\left(\frac{x_1^2+1}{x_1}+\frac{x_2^2+1}{x_2}\right)=\frac{1}{4}$$

$$=> \frac{1}{m}\left(\frac{{}^{x_2}\!/_{x_1^2+1}}{x_1}+\frac{{}^{x_1}\!/_{x_2^2+1}}{x_2}\right)=\frac{1}{4}$$

$$=> \frac{1}{m}\left(\frac{x_1^2 \cdot x_2+x_2+x_1 \cdot x_2^2+x_1}{x_1 \cdot x_2}\right)=\frac{1}{4}$$

$$=> \frac{1}{m}\left[\frac{x_1x_2(x_1+x_2)+(x_1+x_2)}{x_1 \cdot x_2}\right]=\frac{1}{4}$$

$$=> \frac{1}{m}\left[\frac{(x_1+x_2)(x_1 \cdot x_2+1)}{x_1 \cdot x_2}\right]=\frac{1}{4}$$

Aplicăm relaţiile lui Viète :

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{1}{1}=-1$$

$$x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}=m$$

$$=> \frac{1}{m}\left[\frac{-1\cdot(m+1)}{m}\right]=\frac{1}{4} \quad => \frac{-m-1}{m^2}=\frac{1}{4}$$

$$=> m^2 = -4m - 4$$

$$=> m^2 + 4m + 4 = 0$$

$$=> \Delta = 0 \quad => m = -2$$

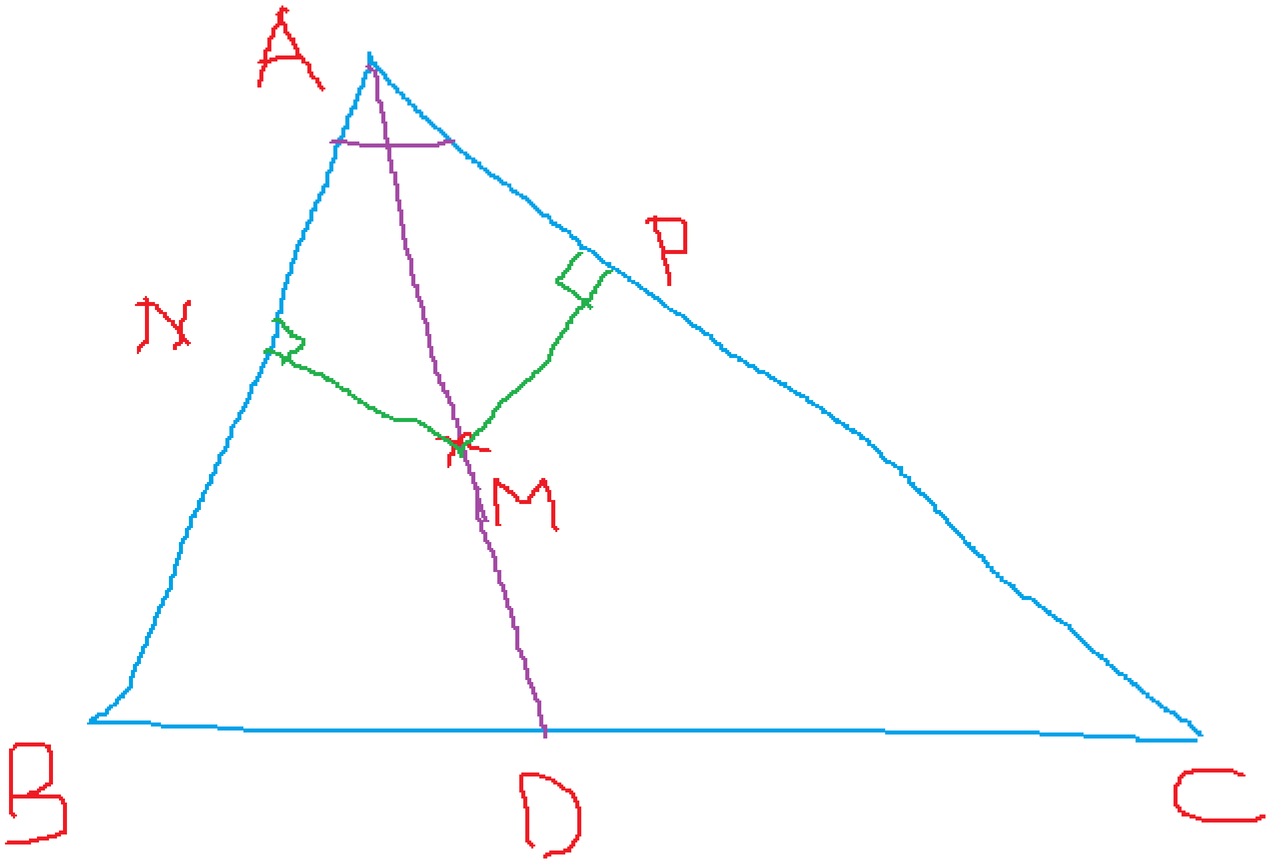
2. Se consideră triunghiul ABC și semidreapta AD, bisectoarea unghiului BAC, $D \in BC$. Punctul M este mijlocul segmentului AD, iar punctele N și P sunt proiecțiile punctului M pe dreptele AB, respectiv AC.

a) Arătați că segmentele AN și AP sunt congruente.

b) Demonstrați că, dacă $AC = 3AN$, atunci triunghiul CDN este isoscel.

Rezolvare :

a)



Δ ANP $\equiv$ Δ AMP :

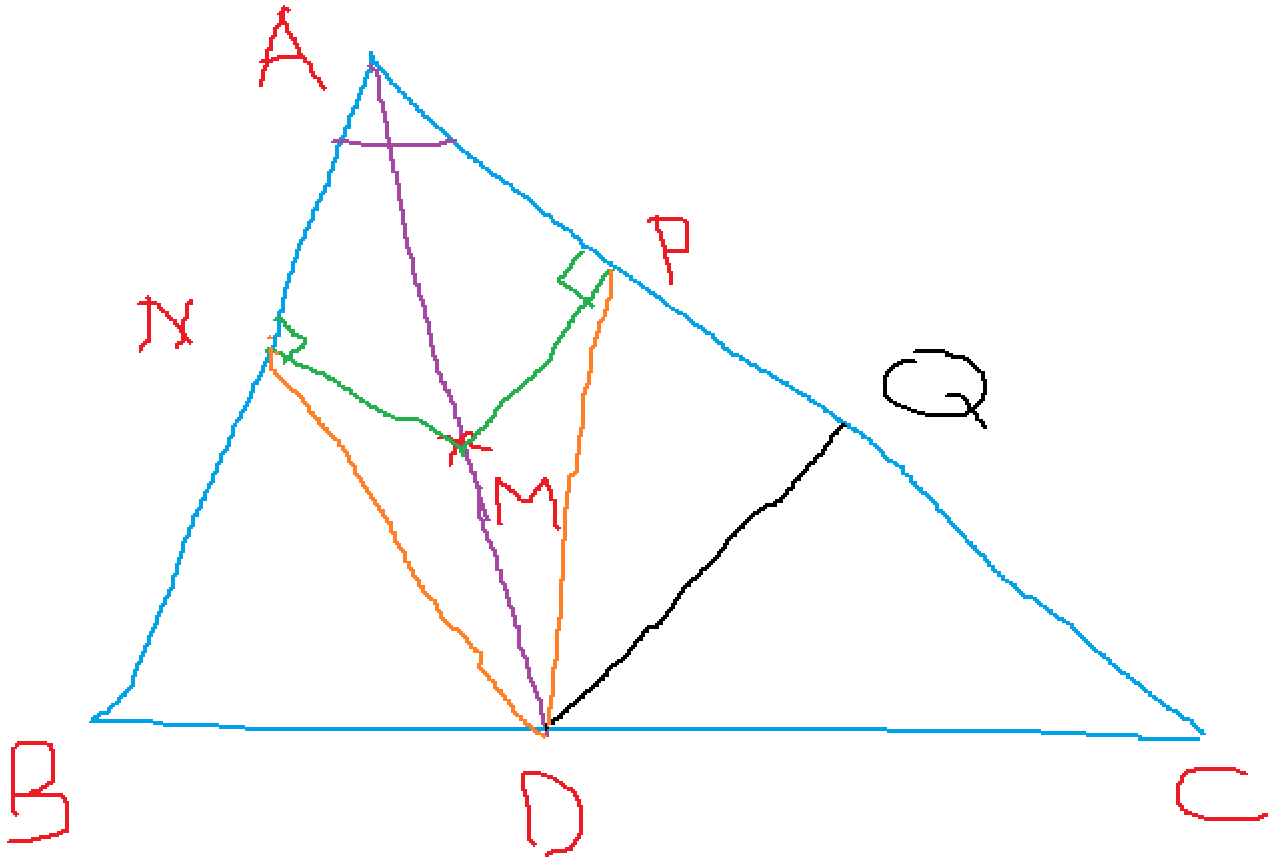
AM = latură comună

$\measuredangle NAM \equiv \measuredangle PAM$ (AD = bisectoare)

=> cazul de congruenţă C.C (avem triunghiuri dreptunghice)

=> $AN \equiv AP$ ✓

b)



Ducem DQ ⊥ AC

Dacă $AC = 3AN \Rightarrow AN = \frac{AC}{3}$

Dar $AN \equiv AP \Rightarrow AP = \frac{AC}{3}$

Deoarece $MP \perp AC$ şi $DQ \perp AC \Rightarrow MP \parallel DQ$

Dar M = mijlocul lui $AD \Rightarrow MP$ = linie mijlocie în ΔADQ

$\Rightarrow AP \equiv PQ \Rightarrow PQ = \frac{AC}{3} \Rightarrow QC = \frac{AC}{3} \Rightarrow PQ \equiv QC$

În $\Delta PDC \Rightarrow DQ$ = mediană şi înălţime $\Rightarrow \Delta PDC$ isoscel

$\Rightarrow PD \equiv DC$ (1)

Se observă acum că $\Delta AND \equiv \Delta APD$:

AD = latură comună

$\sphericalangle NAD \equiv \sphericalangle PAD$ (AD = bisectoare)

$AN \equiv AP$

=> cazul de congruenţă L.U.L => $PD \equiv ND$ (2)

Din (1) şi (2) => $ND \equiv DC$ => $\Delta\, NDC$ = isoscel ✓

3. Pe inelul $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \hat{2}xy + \hat{6}x + \hat{6}y + \hat{7}$.

a) Arătați că $x * y = \hat{2}(x+\hat{3})(y+\hat{3}) + \hat{5}$, pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}_8$.

b) Determinați $x \in \mathbb{Z}_8$ pentru care $x * x * x * x = x$.

Rezolvare : $\hat{1}$ pe $\mathbb{Z}_8$

a) Calculăm şi obţinem : $\uparrow$

$\hat{2}(x + \hat{3})(y + \hat{3}) + \hat{5} = \hat{2}(xy + \hat{3}x + \hat{3}y + \hat{9}) + \hat{5} =$

$= \hat{2}(xy + \hat{3}x + \hat{3}y + \hat{1}) + \hat{5} = \hat{2}xy + \hat{6}x + \hat{6}y + \hat{2} + \hat{5} =$

$= \hat{2}xy + \hat{6}x + \hat{6}y + \hat{7}$ ✓

b) $x * x = \hat{2}\,(x + \hat{3})(x + \hat{3}) + \hat{5} = \hat{2}(x + \hat{3})^2 + \hat{5}$

$x * x * x = [\hat{2}(x + \hat{3})^2 + \hat{5}] * x =$

$= \hat{2}[\hat{2}(x + \hat{3})^2 + \hat{5} + \hat{3}](x + \hat{3}) + \hat{5} = \hat{2}[\hat{2}(x + \hat{3})^2 + \hat{8}](x + \hat{3}) + \hat{5} =$

$\downarrow$

$\hat{0}$ pe $\mathbb{Z}_8$

$= \hat{4}(x + \hat{3})^3 + \hat{5}$

$\hat{0}$ pe $\mathbb{Z}_8$

$x * x * x * x = [\hat{4}(x + \hat{3})^3 + \hat{5}] * x =$

$\uparrow$

$= \hat{2}[\hat{4}(x + \hat{3})^3 + \hat{5} + \hat{3}](x + \hat{3}) + \hat{5} = \hat{2}[\hat{4}(x + \hat{3})^3 + \hat{8}](x + \hat{3}) + \hat{5} =$

$= \hat{8}(x + \hat{3})^4 + \hat{5} = \hat{0}(x + \hat{3})^4 + \hat{5} = \hat{5}$

$=> \ \hat{5} = x \quad => \ x = \hat{5}$

4. Se consideră funcția $f:[0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x^3+2}$.

a) Arătați că funcția f este strict descrescătoare pe $(1,+\infty)$.

b) Demonstrați că $\int_0^1 f^2(x)\,dx=\frac{1}{18}$.

Rezolvare :

a) $f'(x) = \left(\frac{x}{x^3+2}\right)' = \frac{x'(x^3+2)-x(x^3+2)'}{(x^3+2)^2} = \frac{1(x^3+2)-x(3x^2)}{(x^3+2)^2} =$

$= \frac{x^3+2-3x^3}{(x^3+2)^2} = \frac{2-2x^3}{(x^3+2)^2} = \frac{2(1-x^3)}{(x^3+2)^2}$

$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2(1-x^3) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1-x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$

Tabelul de monotonie :

x	0 1 $+\infty$
$f'(x)$	+ + + + + + + 0 − − − − − − − − − − − −
$f(x)$	↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ f(1) ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘

=> f (x) descrescătoare pe $(1\ ;+\infty)$

b) $\int_0^1 (\frac{x}{x^3+2})^2 dx = \int_0^1 \frac{x^2}{(x^3+2)^2} dx$

Aplicăm prima metodă de integrare prin schimbare de variabilă :

$t = x^3 + 2$

$dt = 3x^2 dx$

Schimbăm acum „capetele de integrare” :

$x = 0 \ => \ t = 0^3 + 2 = 2$

$x = 1 \Rightarrow t = 1^3 + 2 = 3$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x^2}{(x^3+2)^2}\,dx = \frac{1}{3}\int_2^3 \frac{1}{t^2}\,dt = \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{t}\right)\Big|_2^3 = \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{6}+\frac{3}{6}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{18} \checkmark$$

Au fost probleme de dificultate medie , asemănătoare cu subiectele pe care le primeam pe la teze . Nici nu se compară cu problemele care se dădeau la definitivat acum 25 de ani .

De fapt sunt mult mult mult mai uşoare decât problemele de la olimpiada de matematică , „etapa locală" .