

Colegiul Național de Informatică „Tudor Vianu”

Concursul „Micii campioni” – 2021

Ziua 1, 6 iulie 2021

1. Se știe că: $\overline{aaa} \times a + \overline{aa} \times a + \overline{aaa} : a - \overline{aa} + a : a = 2020$. Determinați cifra a .
2. Trei elevi joacă ping-pong. După fiecare joc, elevul învins este înlocuit de elevul care nu a participat la acel joc. La final s-a constatat că unul dintre elevi a jucat 13 jocuri, iar altul a jucat 27 de jocuri. Jocurile desfășurate s-au numerotat, în ordine, cu 1, 2, 3, ..., n , unde n este numărul total de jocuri.
 - a) Determinați numărul n .
 - b) La câte jocuri a participat cel de-al treilea elev?
 - c) La câte jocuri a participat elevul care a pierdut jocul cu numărul 2?
3. Determinați cifrele a, b, c, d pentru care $\overline{abcd} + \overline{abc} = 2021$.
4. Doi prieteni s-au angajat să efectueze o lucrare de lungă durată. Ei au început lucrarea la data de 1 ianuarie 2020. Fiecare zi a fiecărui an este considerată zi lucrătoare. Unul dintre prieteni are o zi de odihnă după fiecare trei zile consecutive lucrate, iar celălalt are trei zile de odihnă după fiecare șapte zile consecutive lucrate. Determinați ziua calendaristică a anului 2024 în care cei doi prieteni au prima zi de odihnă comună.
5. Doi elevi, Andrei și Bogdan, desenează pe tablă tabloul de mai jos și propun următorul joc.

- Începând cu Andrei, alternativ, fiecare dintre ei scrie într-un pătrățel liber al tabloului un număr de la 1 la 9. (Fiecare număr se scrie o singură dată). Câștigă jucătorul care completează primul ultimul pătrățel liber al unei linii sau coloane astfel încât numerele scrise pe acea linie sau coloană să aibă suma egală cu 15. Arătați că unul dintre cei doi elevi poate câștiga de fiecare dată. Care este acesta și explicați strategia lui de câștig.

- Notă:** - Toate problemele sunt obligatorii.
- Fiecare soluție corectă a unei probleme valorează 15 puncte.
- Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.

Colegiul Național de Informatică „Tudor Vianu”

Concursul „Micii campioni” – 2021

Ziua 1, 6 iulie 2021

1. Se știe că: $\overline{aaa} \times a + \overline{aa} \times a + \overline{aaa} : a - \overline{aa} + a : a = 2020$. Determinați cifra a .

Soluție și barem:

Relația din enunț este echivalentă cu $122 \times a \times a - 11 \times a = 1908$ 5p

Deducem că cifra a este pară.....2p

Dacă $a = 2$, rezultă că $122 \times a \times a - 11 \times a + 112 = 466 < 1908$ 2p

Dacă $a \geq 6$, rezultă că $122 \times a \times a - 11 \times a > 122 \times 6 \times 6 - 99 > 1908$ 4p

Pentru $a = 4$, relația din enunț se verifică.....2p

2. Trei elevi joacă ping-pong. După fiecare joc, elevul învins este înlocuit de elevul care nu a participat la acel joc. La final s-a constatat că unul dintre elevi a jucat 13 jocuri, iar altul a jucat 27 de jocuri. Jocurile desfășurate s-au numerotat, în ordine, cu 1, 2, 3, ..., n , unde n este numărul total de jocuri.

a) Determinați numărul n .

b) La câte jocuri a participat cel de-al treilea elev?

c) La câte jocuri a participat elevul care a pierdut jocul cu numărul 2 ?

Soluție și barem:

a) Fiecare elev participă la cel puțin unul dintre două jocuri consecutive. Deoarece unul dintre jucători a participat la 13 jocuri înseamnă că numărul total de jocuri nu depășește $2 \cdot 13 + 1 = 27$.
.....3p

Cum unul dintre elevi a participat la 27 jocuri, rezultă că numărul total de jocuri desfășurate este $n = 27$ 3p

b) Deci, al treilea jucător a participat la $27 - 13 = 14$ jocuri.....5p

c) Jucătorul care a jucat 27 jocuri le-a câștigat pe toate. 2p

Cum jucătorul care a pierdut prima partidă a jucat 14 jocuri, deducem că jucătorul care a participat la 13 jocuri a pierdut a doua partidă.....2p

3. Determinați cifrele a, b, c, d pentru care $\overline{abcd} + \overline{abc} = 2021$.

Soluție și barem:

$\overline{abcd} + \overline{abc} = 2021$ este echivalent cu $11 \cdot \overline{abc} + d = 2021$5p

Deoarece $d < 11$, rezultă că d este restul împărțirii lui 2021 la 11.....5p

Cum $2021 = 11 \cdot 133 + 8$, rezultă că $a = 1, b = 8, c = 3, d = 8$5p

4. Doi prieteni s-au angajat să efectueze o lucrare de lungă durată. Ei au început lucrarea la data de 1 ianuarie 2020. Fiecare zi a fiecărui an este considerată zi lucrătoare. Unul dintre prieteni are o zi de odihnă după fiecare trei zile consecutive lucrate, iar celălalt are trei zile de odihnă după fiecare șapte zile consecutive lucrate. Determinați ziua calendaristică a anului 2024 în care cei doi prieteni au prima zi de odihnă comună.

Soluție și barem:

De la 1 ianuarie 2020 până la 31 decembrie 2023 (inclusiv) sunt $366 + 3 \cdot 365 = 1461$ zile...3p

Cei doi prieteni au grafice de lucru cu perioade de 4 zile și respectiv 10 zile.....3p

Deoarece $1461 = 4 \cdot 365 + 1$ și $1461 = 10 \cdot 146 + 1$, rezultă că, pentru ambii prieteni, ziua de 31 decembrie 2023 este prima zi de lucru după o zi de odihnă comună.....7p

Rezultă că prima zi de odihnă comună din anul 2024 este 7 ianuarie.....2p

5. Doi elevi, Andrei și Bogdan, desenează pe tablă tabloul de mai jos și propun următorul joc.

Începând cu Andrei, alternativ, fiecare dintre ei scrie într-un pătrățel liber al tabloului un număr de la 1 la 9. (Fiecare număr se scrie o singură dată). Câștigă jucătorul care completează primul ultimul pătrățel liber al unei linii sau coloane astfel încât numerele scrise pe acea linie sau coloană să aibă suma egală cu 15.

Arătați că unul dintre cei doi elevi poate câștiga de fiecare dată. Care este acesta și explicați strategia lui de câștig.

Soluție și barem:

Vom arăta că jucătorul care începe jocul (Andrei) câștigă.....1p

Andrei observă că:

- dacă el scrie un număr într-un pătrățel acesta se află la intersecția unei linii cu o coloană;
- dacă el găsește un număr pentru care există cel puțin trei perechi de numere cu care reușește să completeze cele trei pătrățele de pe linia/coloana respectivă cu suma 15, câștigă;
- $15 = 8 + (6 + 1) = 8 + (5 + 2) = 8 + (4 + 3) \neq 8 + (7 + 9)$ 7p

Prin urmare, dacă el începe cu 8, are la dispoziție trei perechi de numere care sunt „bune” $(6,1), (5,2), (4,3)$ și o pereche „rea” $(7,9)$ 3p

De exemplu:

Andrei scrie cifra 8 în pătrățelul din centrul tablei. Dacă Bogdan scrie un număr într-un pătrățel al tablei, atunci Andrei scrie în pătrățelul simetric față de centru numărul din perechea corespunzătoare. Cum cel mult cele două diagonale pot fi completate cu suma 15, rezultă că cel puțin o linie/coloană va fi completată de Andrei cu suma 15.....4p