Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați termenul b_4 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_5=6$ și $b_6=18$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x-4$. Determinaţi numerele reale m, știind că $f(m)=m$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $100\cdot 10^{2x}=10^{3x}$.

5p **4.** Determinaţi câte numere naturale pare, de două cifre, se pot forma cu cifre din mulțimea $\{0,1,2,3,4\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-4,0)$, $B(4,0)$ şi $C(0,4)$. Determinaţi coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC.

5p **6.** Arătați că $\sin 2x=1$, știind că $\operatorname{tg} x=1$ și $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x+2 & 3 \\ -1 & x-2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=-1$.

5p **b)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care matricea $A(x)$ este inversabilă.

5p **c)** Se consideră numerele reale a, b și c, astfel încât $A(a)\cdot A(b)=A(c)$. Demonstrați că $a^2+b^2+2c=3$.

2. Pe mulțimea $M=[-1,1]$ se definește legea de compoziție $x\circ y=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}$.

5p **a)** Arătați că $0\circ 1=1$.

5p **b)** Determinați $x\in M$ pentru care $x\circ x=0$.

5p **c)** Demonstrați că $x\circ\sqrt{1-x^2}=1$, pentru orice $x\in[0,1]$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+x\ln x-1$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=e^x+\ln x+1$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $e^x+x\ln x\geq\sqrt{e}+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}$, pentru orice $x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+2}+\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\sqrt{x^2+2}\,dx=\frac{17}{6}$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Se consideră funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$. Determinați $a\in(0,+\infty)$ pentru care $\int_0^1 g(x)\,dx=\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln\frac{a+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$b_5^2 = b_4 b_6 \Rightarrow 36 = 18 b_4$	**3p**
	$b_4 = 2$	**2p**
2.	$m^2 + m - 4 = m \Leftrightarrow m^2 - 4 = 0$	**3p**
	$m = -2$ sau $m = 2$	**2p**
3.	$10^{2x+2} = 10^{3x} \Leftrightarrow 2x + 2 = 3x$	**3p**
	$x = 2$	**2p**
4.	Cifra unităților, fiind pară, se poate alege în 3 moduri	**2p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor, fiind nenulă, se poate alege în câte 4 moduri, deci se pot forma $3 \cdot 4 = 12$ numere	**3p**
5.	$OA = 4$, $OB = 4$, $OC = 4$	**3p**
	Centrul cercului circumscris ΔABC are coordonatele $x = 0$, $y = 0$	**2p**
6.	Cum $\mathrm{tg}\, x = 1$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, obținem $x = \frac{\pi}{4}$	**2p**
	$\sin 2x = \sin \frac{2\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{2} = 1$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - (-1) \cdot 3 =$	**3p**
	$= -4 + 3 = -1$	**2p**
b)	$\det(A(x)) = \begin{vmatrix} x+2 & 3 \\ -1 & x-2 \end{vmatrix} = x^2 - 1$, pentru orice număr real x	**2p**
	Matricea $A(x)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A(x)) \neq 0$, deci $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$	**3p**
c)	$A(a) \cdot A(b) = A(c) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} ab + 2a + 2b + 1 & 3a + 3b \\ -a - b & ab - 2a - 2b + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+2 & 3 \\ -1 & c-2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a + b = 1$ și $c = ab + 1$	**3p**
	$a^2 + b^2 + 2c = a^2 + b^2 + 2ab + 2 = (a+b)^2 + 2 = 1 + 2 = 3$	**2p**
2.a)	$0 \circ 1 = 0 \cdot \sqrt{1-1} + 1 \cdot \sqrt{1-0} =$	**3p**
	$= 0 + 1 = 1$	**2p**
b)	$x \circ x = 2x\sqrt{1-x^2}$, pentru orice $x \in M$	**2p**
	$2x\sqrt{1-x^2} = 0$, deci $x = -1$, $x = 0$ sau $x = 1$, care convin	**3p**
c)	$x \circ \sqrt{1-x^2} = x\sqrt{1-(1-x^2)} + \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-x^2} = x\sqrt{x^2} + 1 - x^2 = x\lvert x\rvert + 1 - x^2$, pentru orice $x \in M$	**3p**
	Cum $\lvert x\rvert = x$ pentru orice $x \in [0,1]$, obținem $x \circ \sqrt{1-x^2} = x^2 + 1 - x^2 = 1$, pentru orice $x \in [0,1]$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(e^x\right)'+x'\cdot\ln x+x\cdot(\ln x)'-1'=$	**2p**
	$=e^x+1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=e^x+\ln x+1$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$f(1)=e-1$, $f'(1)=e+1$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=(e+1)x-2$	**3p**
c)	$x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)\Rightarrow\ln x\ge\ln\frac{1}{2}$, deci $f'(x)=e^x+\ln x+1\ge e^x+\ln\frac{e}{2}>e^x>0$, de unde obținem că f este crescătoare pe $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$	**3p**
	Pentru orice $x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$, $f(x)\ge f\left(\frac{1}{2}\right)$, deci $e^x+x\ln x-1\ge\sqrt{e}+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}-1$, de unde obținem $e^x+x\ln x\ge\sqrt{e}+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}$, pentru orice $x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$	**2p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)\sqrt{x^2+2}\,dx=\int_0^1\left(x^2+2+x\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+2x+\frac{x^2}{2}\right)\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}+2+\frac{1}{2}=\frac{17}{6}$	**2p**
b)	$F'(x)=f(x)=\frac{x^2+x+2}{\sqrt{x^2+2}}$, unde $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f	**3p**
	$x^2+x+2>0$, pentru orice număr real x, deci $F'(x)>0$, pentru orice număr real x, de unde obținem că F este crescătoare pe $\mathbb{R}$	**2p**
c)	$\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 x'\sqrt{x^2+2}\,dx=x\sqrt{x^2+2}\Big\|_0^1-\int_0^1 x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}dx=\sqrt{3}-\int_0^1\left(\sqrt{x^2+2}-\frac{2}{\sqrt{x^2+2}}\right)dx$, deci $\int_0^1 g(x)dx=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+2\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)\right)\Big\|_0^1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	**3p**
	$\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln\frac{a+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, de unde obținem $a=1$, care convine	**2p**