

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M\_tehnologic*

Varianta 1

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că  $\frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{2}{5}\right) + \frac{4}{5} = 1$ .
- 5p 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x - 1$ . Arătați că  $f(1) \cdot f(3) = 5$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{5x - 6} = 2$ .
- 5p 4. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 25.
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(4,0)$ ,  $B(0,2)$  și  $C(0,-2)$ . Determinați distanța de la punctul  $A$  la mijlocul segmentului  $BC$ .
- 5p 6. Se consideră  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  astfel încât  $\cos x = \frac{1}{4}$ . Arătați că  $\sin x = \frac{\sqrt{15}}{4}$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  și  $B(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$ , unde  $x$  este număr real.
- 5p a) Arătați că  $\det A = 10$ .
- 5p b) Arătați că  $2B(5) + B(-1) = 3B(3)$ .
- 5p c) Determinați numărul întreg  $x$  pentru care  $\det(A \cdot B(x) - B(4x)) = 0$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = x(y - 2) + y(x - 2)$ .
- 5p a) Arătați că  $2 * 4 = 4$ .
- 5p b) Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $x * x = 0$ .
- 5p c) Determinați numărul real  $x$  pentru care  $(x * 1) * (x + 1) = 4$ .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2}{2x^2 + 1}$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = \frac{-8x}{(2x^2 + 1)^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul de abscisă  $x = 0$ , situat pe graficul funcției  $f$ .
- 5p c) Arătați că  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xf(x) \ln x) = 0$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 + 6x + 1$ .
- 5p a) Arătați că  $\int_1^2 (f(x) - x^3 - 1) dx = 9$ .
- 5p b) Arătați că  $\int_0^1 \frac{x^2}{f(x) - 6x} dx = \frac{1}{3} \ln 2$ .
- 5p c) Determinați numărul real  $a$  pentru care  $\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx = \frac{a^3}{5}$ .

**Examenul național de bacalaureat 2021**

**Proba E. c)**

**Matematică *M\_tehnologic***

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Varianta 1**

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

1.	$\frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{2}{5}\right) + \frac{4}{5} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{5} =$	3p
	$= \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1$	2p
2.	$f(1) = 1$	2p
	$f(3) = 5 \Rightarrow f(1) \cdot f(3) = 1 \cdot 5 = 5$	3p
3.	$5x - 6 = 2^2 \Rightarrow 5x - 6 = 4$	3p
	$x = 2$ , care convine	2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	2p
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre, multiplii de 25 sunt numerele 25, 50 și 75, deci sunt 3 cazuri favorabile	2p
	$p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$	1p
5.	$O(0,0)$ este mijlocul segmentului $BC$	2p
	$AO = 4$	3p
6.	$\sin^2 x + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{15}{16}$	3p
	Cum $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , obținem $\sin x = \frac{\sqrt{15}}{4}$	2p

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - (-3) \cdot 2 =$	3p
	$= 4 + 6 = 10$	2p
b)	$B(5) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ și $B(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow 2B(5) + B(-1) = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} =$	3p
	$= 3 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 3B(3)$	2p
c)	$A \cdot B(x) - B(4x) = \begin{pmatrix} 4x+3 & 4-3x \\ 2x-1 & 2+x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4x & 1 \\ -1 & 4x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3-3x \\ 2x & 2-3x \end{pmatrix}$ , pentru orice număr întreg	3p
	$x$ , deci $\det(A \cdot B(x) - B(4x)) = 6x^2 - 15x + 6$ , pentru orice număr întreg $x$ $6x^2 - 15x + 6 = 0$ și, cum $x$ este număr întreg, obținem $x = 2$	2p

<b>2.a)</b>	$2 * 4 = 2(4 - 2) + 4(2 - 2) = 2 \cdot 2 + 4 \cdot 0 =$ $= 4 + 0 = 4$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$x * x = x(x - 2) + x(x - 2) = 2x(x - 2)$ , pentru orice număr real $x$ $2x(x - 2) = 0$ , de unde obținem $x = 0$ sau $x = 2$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$x * 1 = -2$ , deci $(x * 1) * (x + 1) = (-2) * (x + 1) = -6x - 2$ , pentru orice număr real $x$ $-6x - 2 = 4$ , de unde obținem $x = -1$	<b>3p</b> <b>2p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = \frac{2 \cdot (2x^2 + 1) - 2 \cdot (2x^2 + 1)'}{(2x^2 + 1)^2} =$ $= \frac{-2 \cdot 4x}{(2x^2 + 1)^2} = \frac{-8x}{(2x^2 + 1)^2}, x \in \mathbb{R}$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$f(0) = 2, f'(0) = 0$ Ecuția tangentei este $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ , adică $y = 2$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>c)</b>	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (xf(x) \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x \ln x}{2x^2 + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2 \ln x + 2}{4x} \right) =$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_1^2 (f(x) - x^3 - 1) dx = \int_1^2 6x dx = 3x^2 \Big _1^2 =$ $= 12 - 3 = 9$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$\int_0^1 \frac{x^2}{f(x) - 6x} dx = \int_0^1 \frac{x^2}{x^3 + 1} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{(x^3 + 1)'}{x^3 + 1} dx = \frac{1}{3} \ln(x^3 + 1) \Big _0^1 =$ $= \frac{1}{3} \ln 2 - \frac{1}{3} \ln 1 = \frac{1}{3} \ln 2$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx = \int_0^1 (x\sqrt{x} + 6\sqrt{x} + 1) dx = \left( \frac{2x^2\sqrt{x}}{5} + 6 \cdot \frac{2x\sqrt{x}}{3} + x \right) \Big _0^1 = \frac{27}{5}$ $\frac{a^3}{5} = \frac{27}{5}$ , de unde obținem $a = 3$	<b>3p</b> <b>2p</b>