

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați al treilea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, știind că $b_1 = 2$ și $b_2 = 6$.
- 5p** 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 7$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x - 7$. Calculați $(f \circ g)(7)$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x-1} = x-2$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice inegalitatea $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) > 0$.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$, $B(-1,0)$, $C(3,5)$ și $D(5,6)$. Demonstrați că punctele B , D și mijlocul segmentului AC sunt coliniare.
- 5p** 6. Determinați $x \in (0, \pi)$, știind că $(\sin x - \cos x)^2 = 2$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(a) = \begin{pmatrix} 1+2^a & 2^a \\ -2^a & 1-2^a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(0)) = 1$.
- 5p** b) Arătați că $A(1) + A(2) - A(1) \cdot A(2) = I_2$.
- 5p** c) Se consideră numerele naturale m și n , astfel încât $A(m) \cdot A(n) = A(m+n)$. Arătați că $m = n = 1$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x^2 + y^2 + x + y$.
- 5p** a) Arătați că $(-1) * (-1) = 0$.
- 5p** b) Demonstrați că $x * y = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p** c) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care $x^2 * x^2 \leq 4$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x - \frac{1}{2} \ln(x+2)$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{(2x+3)(2x+5)}{2(x+2)}$, $x \in (-2, +\infty)$.
- 5p** b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4x - f(x)}{x}$.
- 5p** c) Demonstrați că $x^2 + 4x + \frac{15}{4} \geq \frac{1}{2} \ln(2x+4)$, pentru orice $x \in (-2, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \frac{2}{x^2 + 1}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^3 (x^2 + 1) f(x) dx = 18$.
- 5p** b) Arătați că $\int_1^3 x f(x) dx = 4 + \ln 5$.
- 5p** c) Demonstrați că $F(x+1) \geq F(x) + 1$, pentru orice număr real x , unde F este o primitivă a lui f .

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$q = 3$, unde q este rația progresiei geometrice $b_3 = 2 \cdot 3^2 = 18$	3p 2p
2.	$g(7) = 0$ $(f \circ g)(7) = f(g(7)) = f(0) = 7$	2p 3p
3.	$2x - 1 = (x - 2)^2 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$ $x = 1$, care nu convine, $x = 5$, care convine	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de o cifră are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile Mulțimea numerelor naturale de o cifră care verifică $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) > 0$ are 5 elemente, deci sunt 5 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$	2p 2p 1p
5.	Mijlocul segmentului AC este punctul $M(2,3)$ și $m_{BM} = 1$ $m_{BD} = 1$, deci $m_{BD} = m_{BM}$, de unde obținem că punctele B , D și M sunt coliniare	3p 2p
6.	$\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 2 \Leftrightarrow 1 - \sin 2x = 2 \Leftrightarrow \sin 2x = -1$ Cum $x \in (0, \pi)$, obținem $2x = \frac{3\pi}{2}$, deci $x = \frac{3\pi}{4}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) =$ $= 0 + 1 = 1$	3p 2p
b)	$A(1) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $A(2) = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$, $A(1) \cdot A(2) = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$ $A(1) + A(2) - A(1) \cdot A(2) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -6 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$	3p 2p
c)	$A(m) \cdot A(n) = \begin{pmatrix} 1 + 2^m + 2^n & 2^m + 2^n \\ -2^m - 2^n & 1 - 2^m - 2^n \end{pmatrix}$, $A(m+n) = \begin{pmatrix} 1 + 2^{m+n} & 2^{m+n} \\ -2^{m+n} & 1 - 2^{m+n} \end{pmatrix}$, unde m și n sunt numere naturale $A(m) \cdot A(n) = A(m+n) \Leftrightarrow 2^{m+n} = 2^m + 2^n \Leftrightarrow (2^m - 1)(2^n - 1) = 1$ și, cum m și n sunt numere naturale, obținem $m = n = 1$	2p 3p
2.a)	$(-1) * (-1) = (-1)^2 + (-1)^2 + (-1) + (-1) =$ $= 1 + 1 - 1 - 1 = 0$	3p 2p

b)	$x * y = x^2 + x + \frac{1}{4} + y^2 + y + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} =$ $= \left(x^2 + 2x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right) + \left(y^2 + 2y \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right) - \frac{1}{2} = \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{2}, \text{ pentru orice}$ <p>numere reale x și y</p>	3p 2p
c)	$x^2 * x^2 \leq 4 \Leftrightarrow 2 \left(x^2 + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \leq 4 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{2} \right)^2 \leq \frac{9}{4}, \text{ de unde obținem } x^2 + \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2}$ <p>$x \in [-1, 1]$</p>	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 2x + 4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+2} = 2(x+2) - \frac{1}{2(x+2)} = \frac{4(x+2)^2 - 1}{2(x+2)} =$ $= \frac{(2(x+2)-1)(2(x+2)+1)}{2(x+2)} = \frac{(2x+3)(2x+5)}{2(x+2)}, x \in (-2, +\infty)$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4x - f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2} \ln(x+2)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+2)}{2x} =$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} = 0$	2p 3p
c)	<p>$f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in \left(-2, -\frac{3}{2}\right] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $\left(-2, -\frac{3}{2}\right]$ și $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $\left[-\frac{3}{2}, +\infty\right)$, $f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{15}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$</p> <p>Pentru orice $x \in (-2, +\infty)$, $f(x) \geq f\left(-\frac{3}{2}\right)$, deci $x^2 + 4x - \frac{1}{2} \ln(x+2) \geq -\frac{15}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$, de unde obținem $x^2 + 4x + \frac{15}{4} \geq \frac{1}{2} \ln(2x+4)$, pentru orice $x \in (-2, +\infty)$</p>	3p 2p
2.a)	$\int_0^3 (x^2 + 1) f(x) dx = \int_0^3 (x^2 + 1 + 2) dx = \left(\frac{x^3}{3} + 3x \right) \Big _0^3 =$ $= \frac{27}{3} + 9 = 18$	3p 2p
b)	$\int_1^3 x f(x) dx = \int_1^3 \left(x + \frac{2x}{x^2 + 1} \right) dx = \frac{x^2}{2} \Big _1^3 + \ln(x^2 + 1) \Big _1^3 =$ $= \frac{9-1}{2} + \ln 10 - \ln 2 = 4 + \ln 5$	3p 2p
c)	<p>F este o primitivă a funcției f și f este continuă, deci, pentru orice număr real x,</p> $F(x+1) - F(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt$ <p>$f(t) = 1 + \frac{2}{t^2 + 1} > 1$, pentru orice număr real t, deci $\int_x^{x+1} f(t) dt \geq \int_x^{x+1} 1 dt = x+1 - x = 1$, de unde obținem că $F(x+1) \geq F(x) + 1$, pentru orice număr real x</p>	2p 3p