SIMULARE – Varianta 2

BACALAUREAT MATEMATICĂ 24 iunie 2021
CLASA a XII-a – profil matematică - informatică

Anul şcolar 2020 – 2021

Subiecte selectate de către:

- ***Prof. Gobej Adrian, Colegiul Național Vlaicu-Vodă, Curtea de Argeș***
- ***Prof. Ionescu Marian, Colegiul Național Zinca Golescu, Pitești***

******Subiectele au fost selectate din variantele oficiale 2017,2018,2019 și simulările naționale aferente acestor ani!***

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=2+i$. Arătați că $z+\overline{z}+z\overline{z}=9$, unde $\overline{z}$ este conjugatul lui z.

5p **2.** Determinați numărul real m, știind că punctul $A(1,m)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x-3$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(1-\log_2 x)(2-\log_2 x)=0$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor strict mai mică decât cifra unităților.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,1)$, $B(3,3)$ și $C(0,2)$. Determinați lungimea medianei din C a triunghiului ABC.

5p **6.** Arătați că $\left(1+\mathrm{tg}^2 x\right)\cos^2 x-\left(1+\mathrm{ctg}^2 x\right)\sin^2 x=0$, pentru orice $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x,y)=\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 1 & x & y \\ x & 1 & y \end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(2,3)\right)=12$.

5p **b)** Demonstrați că $\det\left(A\left(n^2,n\right)\right)\geq 0$, pentru orice număr natural n.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care inversa matricei $B=A(x,0)\cdot A(x,0)$ este matricea $A(x,0)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy-\frac{1}{2}(x+y)+\frac{3}{4}$. Legea de compoziție este asociativă și are elementul neutru $e=\frac{3}{2}$.

5p **a)** Demonstrați că $x*y=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale nenule x pentru care $\frac{1}{x}*x*\frac{1}{x}=x*\frac{1}{x}*x$.

5p **c)** Arătați că **nu** există numere întregi x și y, astfel încât x să fie simetricul lui y în raport cu legea de compoziție „$*$”.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{1-x}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{1-x+x\ln x}{x(1-x)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că $x\ln x>x-1$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$.
	2. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_1^e x\ln^n x\,dx$.
5p	**a)** Arătați că $\int_1^e x\,dx=\frac{e^2-1}{2}$.
5p	**b)** Demonstrați că $I_{n+1}\le I_n$, pentru orice număr natural nenul n.
5p	**c)** Demonstrați că $2I_{n+1}+(n+1)I_n=e^2$, pentru orice număr natural nenul n.

Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z+\bar{z}+z\bar{z}=2+i+2-i+(2+i)(2-i)=$	**3p**
	$=4+4-i^2=9$	**2p**
2.	$f(1)=m\Rightarrow 1+2-3=m$	**3p**
	$m=0$	**2p**
3.	$1-\log_2 x=0$ sau $2-\log_2 x=0$	**3p**
	$x=2$ sau $x=4$, care convin	**2p**
4.	Mulţimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Mulţimea numerelor naturale de două cifre, care au cifra zecilor strict mai mică decât cifra unităţilor are 36 de elemente, deci sunt 36 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{36}{90}=\dfrac{2}{5}$	**1p**
5.	$M(3,2)$, unde punctul M este mijlocul segmentului AB	**3p**
	$CM=3$	**2p**
6.	$(1+\operatorname{tg}^2 x)\cos^2 x-(1+\operatorname{ctg}^2 x)\sin^2 x=\left(1+\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)\cos^2 x-\left(1+\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)\sin^2 x=$	**3p**
	$=\cos^2 x+\sin^2 x-(\sin^2 x+\cos^2 x)=0$, pentru orice $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2,3)=\begin{pmatrix}2&3&1\\1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(2,3))=\begin{vmatrix}2&3&1\\1&2&3\\2&1&3\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=12+1+18-4-6-9=12$	**3p**
b)	$\det\left(A(n^2,n)\right)=\begin{vmatrix}n^2&n&1\\1&n^2&n\\n^2&1&n\end{vmatrix}=(n^2+n+1)\begin{vmatrix}1&n&1\\1&n^2&n\\1&1&n\end{vmatrix}=(n^2+n+1)\begin{vmatrix}1&n&1\\0&n^2-n&n-1\\0&1-n&n-1\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=(n^2+n+1)(n-1)^2(n+1)\geq 0$, pentru orice număr natural n	**2p**
c)	$B=\begin{pmatrix}x^2+x&1&x\\2x&x^2&1\\x^2+1&x&x\end{pmatrix}\Rightarrow B\cdot A(x,0)=A(x,0)\cdot B=\begin{pmatrix}x^3+2x^2+1&2x&x^2+x\\3x^2+x&x^3+1&2x\\x^3+x^2+2x&x^2+x&x^2+1\end{pmatrix}$	**3p**
	Inversa matricei B este matricea $A(x,0)\Leftrightarrow B\cdot A(x,0)=A(x,0)\cdot B=I_3$, deci $x=0$	**2p**

2.a)	$x*y=xy-\frac{x}{2}-\frac{y}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=$	**2p**
	$=x\left(y-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x}-x\right)=0$	**1p**
	$\frac{1}{x}-\frac{1}{2}=0\Rightarrow x=2$	**1p**
	$x-\frac{1}{2}=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$	**1p**
	$\frac{1}{x}-x=0\Rightarrow x=-1$ sau $x=1$	**2p**
c)	Presupunem că există x și y numere întregi, astfel încât x să fie simetricul lui y, deci $x*y=e$, de unde obținem $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$	**2p**
	$\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)=1\Rightarrow(2x-1)(2y-1)=4$, ceea ce nu convine, deoarece x și y sunt numere întregi și 4 este număr par	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot(1-x)-\ln x\cdot(-1)}{(1-x)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{\frac{1-x}{x}+\ln x}{(1-x)^2}=\dfrac{1-x+x\ln x}{x(1-x)^2}$, $x\in(1,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{1-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{-1}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$g:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=x\ln x-x+1\Rightarrow g'(x)=\ln x$, deci $g'(x)>0$ pentru orice $x\in(1,+\infty)$	**3p**
	Funcția g este strict crescătoare pe $(1,+\infty)$ și, cum $\lim\limits_{x\to1}g(x)=0$, obținem $g(x)>0$, deci $x\ln x>x-1$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$	**2p**

2.a)	$\int_1^e x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right\|_1^e =$	**3p**
	$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e^2-1}{2}$	**2p**
b)	$x \in [1,e] \Rightarrow 0 \le \ln x \le 1 \Rightarrow \ln x - 1 \le 0$	**2p**
	$I_{n+1} - I_n = \int_1^e x \ln^n x (\ln x - 1)\,dx \le 0$, deci $I_{n+1} \le I_n$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**
c)	$I_{n+1} = \int_1^e x \ln^{n+1} x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\ln^{n+1} x\right\|_1^e - \frac{n+1}{2}\int_1^e x \ln^n x\,dx =$	**3p**
	$= \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$, deci $2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2$, pentru orice număr natural nenul n	**2p**

NR. CRT.	SUBIECTUL I						TOTAL I	SUBIECTUL II						TOTAL II	SUBIECTUL III						TOTAL III	OFICIU	TOTAL
								1)			2)				1)			2)					
	1)	2)	3)	4)	5)	6)		a)	b)	c)	a)	b)	c)		a)	b)	c)	a)	b)	c)			
	5p	5p	5p	5p	5p	5p	30p	5p	5p	5p	5p	5p	5p	30p	5p	5p	5p	5p	5p	5p	30p		
																						10p	
																						10p	
																						10p	
																						10p	
																						10p	
																						10p	
																						10p	
																						10p	
																						10p	
																						10p	
																						10p	
																						10p	
																						10p	
																						10p	
																						10p	
																						10p	
																						10p	
																						10p	
																						10p	
																						10p	
																						10p	
																						10p	
																						10p	
																						10p	
																						10p	
																						10p	
																						10p	

Profesor corector: