SIMULARE – Varianta 1

BACALAUREAT MATEMATICĂ 24 iunie 2021
CLASA a XII-a – profil matematică - informatică

Anul şcolar 2020 – 2021

Subiecte selectate de către:

- ***Prof. Gobej Adrian, Colegiul Național Vlaicu-Vodă, Curtea de Argeș***
- ***Prof. Ionescu Marian, Colegiul Național Zinca Golescu, Pitești***

*******Subiectele au fost selectate din variantele oficiale 2017,2018,2019 și simulările naționale aferente acestor ani!****

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p 1. Calculați modulul numărului complex $z=(2-i)(3+2i)-4(1+i)$.

5p 2. Determinați valorile reale ale lui m pentru care $x^2-(2m+1)x+m(m-1)\geq 0$, pentru orice număr real x.

5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\log_2 x-\log_x 2=1$.

5p 4. Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi A, știind că mulțimea A are exact 16 submulțimi cu cel mult două elemente.

5p 5. Se consideră triunghiul ABC, punctul M mijlocul laturii BC și punctul N mijlocul segmentului AM. Demonstrați că $2\overline{AN}+\overline{BN}+\overline{CN}=\overline{0}$.

5p 6. Determinați $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, știind că $1+3\cos x=\cos 2x$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a,b,c)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ bc & ac & ab\end{pmatrix}$, unde a, b și c sunt numere reale.

5p a) Arătați că $\det(A(0,1,2))=2$.

5p b) Demonstrați că $\det(A(a,b,c))=(b-a)(c-a)(c-b)$, pentru orice numere reale a, b și c.

5p c) Demonstrați că, dacă m, n și p sunt numere naturale, cu $m<n<p$, astfel încât determinantul matricei $A(m,n,p)$ este număr prim, atunci numerele m, n și p sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=\sqrt{x^2y^2+x^2+y^2}$.

5p a) Demonstrați că $x\circ y=\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)-1}$, pentru orice numere reale x și y.

5p b) Determinați perechile de numere naturale a și b, știind că $a\circ b=1$.

5p c) Demonstrați că pentru orice număr natural n, $n\geq 2$, numărul $\underbrace{1\circ 1\circ\ldots\circ 1}_{1 \text{ de } n \text{ ori}}$ **nu** este natural.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg} x-x$.

5p a) Arătați că $f'(x)=-\frac{x^2}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p c) Demonstrați că $f(x)+g(x)=\frac{\pi}{2}$, pentru orice număr real x, unde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\operatorname{arcctg} x+x$.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln(x+1)$.

5p **a)** Calculați $\int_1^2 \frac{(3x-2)f(x)}{\ln(x+1)}dx$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{4}$.

5p **c)** Calculați $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^3}\int_0^t f(x)dx$.

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=6-3i+4i-2i^2-4-4i=4-3i$	**3p**
	$\lvert z\rvert=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$	**2p**
2.	$\Delta=(2m+1)^2-4m(m-1)=8m+1$	**2p**
	$\Delta\le 0$, deci $m\in\left(-\infty,-\frac{1}{8}\right]$	**3p**
3.	$2\log_2 x-\frac{1}{\log_2 x}=1\Rightarrow(2\log_2 x+1)(\log_2 x-1)=0$	**3p**
	$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ sau $x=2$, care convin	**2p**
4.	Numărul de submulțimi cu cel mult două elemente ale mulțimii A este $C_n^0+C_n^1+C_n^2$, unde n este numărul de elemente ale mulțimii A	**3p**
	$1+n+\frac{n(n-1)}{2}=16$ și, cum n este număr natural, obținem $n=5$	**2p**
5.	M mijlocul laturii $BC\Rightarrow\overline{BN}+\overline{CN}=2\overline{MN}$	**2p**
	N mijlocul segmentului AM, deci $\overline{MN}=\overline{NA}$, deci $2\overline{AN}+\overline{BN}+\overline{CN}=2\overline{AN}+2\overline{NA}=\overline{0}$	**3p**
6.	$1+3\cos x=2\cos^2 x-1\Leftrightarrow 2\cos^2 x-3\cos x-2=0\Leftrightarrow(\cos x-2)(2\cos x+1)=0$	**3p**
	$\cos x=-\frac{1}{2}$ și, cum $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, obținem $x=\frac{2\pi}{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0,1,2)=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\2&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(0,1,2))=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&2\\2&0&0\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+0+4-2-0-0=2$	**3p**
b)	$\det(A(a,b,c))=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\bc&ac&ab\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\a&b-a&c-a\\bc&ac-bc&ab-bc\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=\begin{vmatrix}1&0&0\\a&b-a&c-a\\bc&-c(b-a)&-b(c-a)\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)$, pentru orice numere reale a, b și c	**3p**
c)	$\det(A(m,n,p))=(n-m)(p-m)(p-n)$ și, cum m, n și p sunt numere naturale, cu $m<n<p$, obținem $p-m>p-n>0$ și $p-m>n-m>0$	**3p**
	Cum $\det(A(m,n,p))$ este număr prim, obținem $p-n=n-m=1$, deci numerele m, n și p sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice	**2p**

2.a)	$x\circ y=\sqrt{x^2y^2+x^2+y^2+1-1}=$	**2p**
	$=\sqrt{x^2\left(y^2+1\right)+\left(y^2+1\right)-1}=\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)-1}$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$\sqrt{\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)-1}=1\Leftrightarrow\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)=2$	**2p**
	Cum a și b sunt numere naturale, obținem $a=1$, $b=0$ sau $a=0$, $b=1$	**3p**
c)	$\underbrace{1\circ 1\circ\ldots\circ 1}_{1\text{ de } n \text{ ori}}=\sqrt{2^n-1}$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$	**2p**
	Dacă $\sqrt{2^n-1}\in\mathbb{N}$, există $k\in\mathbb{N}$ astfel încât $2^n-1=k^2\Rightarrow k$ impar, deci există $m\in\mathbb{N}$ astfel încât $2^n-1=(2m+1)^2$, de unde obținem $2^{n-1}=2m^2+2m+1$, ceea ce este imposibil, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=(\operatorname{arctg}x)'-(x)'=\frac{1}{x^2+1}-1=$	**2p**
	$=\frac{1-x^2-1}{x^2+1}=-\frac{x^2}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\operatorname{arctg}x}{x}-1\right)=-1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}x-x+x\right)=\frac{\pi}{2}$, deci dreapta de ecuație $y=-x+\frac{\pi}{2}$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$f(x)+g(x)=\operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}x$, $x\in\mathbb{R}\Rightarrow\left(f(x)+g(x)\right)'=\frac{1}{x^2+1}+\frac{-1}{x^2+1}=0$, pentru orice număr real x	**3p**
	Cum $f(0)+g(0)=\frac{\pi}{2}$, obținem că $f(x)+g(x)=\frac{\pi}{2}$, pentru orice număr real x	**2p**
2.a)	$\int_1^2\frac{(3x-2)f(x)}{\ln(x+1)}dx=\int_1^2\left(3x^2-2x\right)dx=\left(x^3-x^2\right)\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=8-4-1+1=4$	**2p**
b)	$\int_0^1 x\ln(x+1)dx=\int_0^1\left(\frac{x^2-1}{2}\right)'\ln(x+1)dx=\frac{x^2-1}{2}\ln(x+1)\Big\vert_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1(x-1)dx=$	**3p**
	$=-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big\vert_0^1=\frac{1}{4}$	**2p**
c)	$\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t^3}\int_0^t f(x)dx=\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(t)}{3t^2}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(t+1)}{3t}=\frac{1}{3}$	**2p**

NR. CRT.	**SUBIECTUL I**						**TOTAL I**	**SUBIECTUL II**						**TOTAL II**	**SUBIECTUL III**						**TOTAL III**	**OFICIU**	**TOTAL**
								1)			**2)**				**1)**			**2)**					
	1)	**2)**	**3)**	**4)**	**5)**	**6)**		**a)**	**b)**	**c)**	**a)**	**b)**	**c)**		**a)**	**b)**	**c)**	**a)**	**b)**	**c)**			
	5p	**5p**	**5p**	**5p**	**5p**	**5p**	**30p**	**5p**	**5p**	**5p**	**5p**	**5p**	**5p**	**30p**	**5p**	**5p**	**5p**	**5p**	**5p**	**5p**	**30p**		
																						10p	
																						10p	
																						10p	
																						10p	
																						10p	
																						10p	
																						10p	
																						10p	
																						10p	
																						10p	
																						10p	
																						10p	
																						10p	
																						10p	
																						10p	
																						10p	
																						10p	
																						10p	
																						10p	
																						10p	
																						10p	
																						10p	
																						10p	
																						10p	
																						10p	
																						10p	
																						10p	

Profesor corector: