TEST FINAL 4- ANTRENAMENT BACALAUREAT– 2021 (MAT-INF)
Selecție probleme făcută de prof. G.A. - 16 IUNIE 2021

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați partea reală a numărului complex $(1+2i)^2$.

5p **2.** Se notează cu x_1, x_2 soluțiile ecuației $x^2-3x+a=0$, unde a este un număr real. Determinați a pentru care $x_1+x_2+x_1x_2=5$.

5p **3.** Se notează cu g inversa funcției bijective $f:(0,+\infty)\to(4,+\infty)$, $f(x)=2^x+3$. Determinați $g(5)$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A=\{1,2,3,4,5\}$. Determinați probabilitatea ca, alegând la întâmplare una dintre submulțimile lui A, aceasta să conțină exact trei elemente.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$ și $B(7,12)$. Determinați coordonatele punctului M, știind că $\overline{AM}=\frac{1}{3}\overline{AB}$.

5p **6.** Determinați $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, știind că $\frac{\sin x+2\cos x}{\cos x}=3$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră determinantul $D(a,b)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & a^2 & 1\\ b & b^2 & 1\end{vmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $D(2,3)=2$.

5p **b)** Verificați dacă $D(a,b)=(a-1)(b-1)(b-a)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $P_n\left(n,n^2\right)$, unde n este un număr natural nenul. Determinați numărul natural n, $n\geq 3$, pentru care aria triunghiului $P_1P_2P_n$ este egală cu 1.

2. Pe mulțimea $\mathbb{Z}_{20}=\left\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\ldots,\widehat{19}\right\}$ se definește legea de compoziție $x\circ y=xy+\hat{3}x+\hat{3}y+\hat{9}$.

5p **a)** Demonstrați că $x\circ y=\left(x+\hat{3}\right)\left(y+\hat{3}\right)$, pentru orice $x,y\in\mathbb{Z}_{20}$.

5p **b)** Determinați $a\in\mathbb{Z}_{20}$, știind că $a\circ x=\hat{0}$ pentru orice $x\in\mathbb{Z}_{20}$.

5p **c)** Dați exemplu de $a,b\in\mathbb{Z}_{20}\setminus\left\{\widehat{17}\right\}$ pentru care $a\circ b=\hat{0}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x+\frac{x^2}{2}$.

5p **a)** Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=0$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f(x)\geq 1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n e^x\,dx$.

5p **a)** Calculați I_1.

5p **b)** Arătați că $I_{n+1}+(n+1)I_n=e$, pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Arătați că $1\leq(n+1)I_n\leq e$, pentru orice număr natural nenul n.

BAREM PENTRU AUTOEVALUARE

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(1+2i)^2=-3+4i$	**3p**
	Partea reală este egală cu -3	**2p**
2.	$x_1+x_2=3$	**2p**
	$x_1x_2=a$	**2p**
	$a=2$	**1p**
3.	$x=g(5)\Rightarrow f(x)=5$	**2p**
	$2^x+3=5$	**2p**
	$x=1$	**1p**
4.	$p=\dfrac{\text{nr.cazuri favorabile}}{\text{nr.cazuri posibile}}$	**1p**
	Numărul cazurilor posibile este $2^5=32$	**2p**
	Numărul submulțimilor cu 3 elemente este $C_5^3=10$, adică 10 cazuri favorabile	**1p**
	$p=\dfrac{5}{16}$	**1p**
5.	$\overline{AB}=6\vec{i}+9\vec{j}$ și $\overline{AM}=(x_M-1)\vec{i}+(y_M-3)\vec{j}$	**2p**
	$\overline{AM}=\dfrac{1}{3}\overline{AB}\Leftrightarrow\begin{cases}x_M-1=2\\ y_M-3=3\end{cases}$	**2p**
	$M(3,6)$	**1p**
6.	$\sin x+2\cos x=3\cos x$	**2p**
	$\sin x=\cos x$	**1p**
	$x=\dfrac{\pi}{4}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$D(2,3)=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&4&1\\3&9&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=2$	**3p**
b)	$D(a,b)=\begin{vmatrix}0&0&1\\a-1&a^2-1&1\\b-1&b^2-1&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=(a-1)(b-1)\begin{vmatrix}1&a+1\\1&b+1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=(a-1)(b-1)(b-a)$, pentru orice numere reale a și b	**1p**
c)	$\mathcal{A}_{\Delta P_1P_2P_n}=\dfrac{1}{2}\cdot\lvert\Delta\rvert$, unde $\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&2^2&1\\n&n^2&1\end{vmatrix}=(n-1)(n-2)$	**2p**
	$\mathcal{A}_{\Delta P_1P_2P_n}=1\Leftrightarrow(n-1)(n-2)=2\Leftrightarrow n=3$	**3p**

2.a)	$x \circ y = \left(xy + \hat{3}x\right) + \left(\hat{3}y + \hat{9}\right) =$	**2p**
	$= x\left(y + \hat{3}\right) + \hat{3}\left(y + \hat{3}\right) = \left(x + \hat{3}\right)\left(y + \hat{3}\right)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}_{20}$	**3p**
b)	$\left(a + \hat{3}\right)\left(x + \hat{3}\right) = \hat{0}$, pentru orice $x \in \mathbb{Z}_{20}$	**2p**
	$a + \hat{3} = \hat{0} \Rightarrow a = \widehat{17}$	**3p**
c)	$\left(a + \hat{3}\right)\left(b + \hat{3}\right) = \hat{0}$	**2p**
	De exemplu, pentru $a = \hat{1}$ și $b = \hat{2}$, obținem $a + \hat{3} = \hat{4}$ și $b + \hat{3} = \hat{5}$, deci $a \circ b = \hat{0}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \left(\cos x + \dfrac{x^2}{2}\right)' = (\cos x)' + \left(\dfrac{x^2}{2}\right)' =$	**2p**
	$= -\sin x + 2 \cdot \dfrac{x}{2} = x - \sin x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$	**3p**
b)	$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$	**2p**
	$f(0) = 1$, $f'(0) = 0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y = 1$	**1p**
c)	$f''(x) = -\cos x + 1 \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$	**2p**
	$f'(x) \leq 0$, pentru $x \in (-\infty, 0]$ și $f'(x) \geq 0$, pentru $x \in [0, +\infty)$	**2p**
	$f(x) \geq f(0) \Rightarrow f(x) \geq 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$	**1p**
2.a)	$I_1 = \int_0^1 xe^x dx = xe^x \Big\vert_0^1 - \int_0^1 e^x dx =$	**3p**
	$= e - e^x \Big\vert_0^1 = 1$	**2p**
b)	$I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^x dx = x^{n+1} e^x \Big\vert_0^1 - (n+1) \int_0^1 x^n e^x dx =$	**3p**
	$= e - (n+1) I_n \Rightarrow I_{n+1} + (n+1) I_n = e$	**2p**
c)	Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și $x \in [0,1]$, avem $1 \leq e^x \leq e$ și $x^n \geq 0 \Rightarrow x^n \leq x^n e^x \leq x^n e$	**2p**
	$\int_0^1 x^n dx \leq \int_0^1 x^n e^x dx \leq e \int_0^1 x^n dx \Rightarrow 1 \leq (n+1) I_n \leq e$	**3p**

Mult succes!