TEST FINAL 3- ANTRENAMENT BACALAUREAT– 2021 (MAT-INF)
Selecție probleme făcută de prof. G.A. - 16 IUNIE 2021

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați partea întreagă a numărului real $a=\sqrt[3]{125}+\sqrt{5}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că $(f\circ f)(x)=f(x+1)$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x+1}\le\left(\frac{2}{3}\right)^{3x+5}$.

5p **4.** Determinați numărul de submulțimi cu cel puțin trei elemente ale mulțimii $A=\{0,1,2,\dots,9\}$.

5p **5.** Se consideră triunghiul MNP cu $MN=6$, $MP=8$ și $m(\sphericalangle M)=90°$. Calculați lungimea vectorului $\vec{u}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}$.

5p **6.** Determinați numărul real x, știind că $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x+2=0$ și $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $M(a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ a+1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -a\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+y+z=2\\(a+1)x-y+z=0\\x+y-az=1\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(M(-1))=0$.

5p **b)** Determinați numerele reale a pentru care $\det(M(a))=0$.

5p **c)** Determinați numerele reale a, știind că sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0) și $2x_0+y_0z_0=0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\frac{1}{10}xy-(x+y)+20$.

5p **a)** Demonstrați că $x*y=\frac{1}{10}(x-10)(y-10)+10$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x*x\le\frac{101}{10}$.

5p **c)** Calculați $\log_2 1*\log_2 2*\log_2 3*\ldots*\log_2 2018$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=8x^2-\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{(4x-1)(4x+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Demonstrați că punctul $A\left(\frac{2}{3},3\right)$ aparține tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f\left(\frac{1}{3}\right)<f\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)<f\left(\frac{1}{2}\right)$.

2. Se consideră funcția $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x+3}{x+3}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 (x+3)f(x)\,dx=4$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx=2-3\ln\frac{4}{3}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 e^x(x+3)^n\left(f(x)\right)^n dx$. Demonstrați că $I_n+2nI_{n-1}=e\cdot 5^n-3^n$, pentru orice număr natural n, $n\ge 1$.

BAREM PENTRU AUTOEVALUARE

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a=5+\sqrt{5}$ Cum $2<\sqrt{5}<3$, obținem $[a]=5+[\sqrt{5}]=7$	**2p** **3p**
2.	$(f\circ f)(x)=x+2m$, $f(x+1)=x+1+m$ $x+2m=x+1+m$, deci $m=1$	**2p** **3p**
3.	$\left(\frac{2}{3}\right)^{4x+1}\leq\left(\frac{2}{3}\right)^{3x+5}\Leftrightarrow 4x+1\geq 3x+5$ $x\in[4,+\infty)$	**3p** **2p**
4.	Numărul de submulțimi cu cel puțin 3 elemente ale mulțimii A este $C_{10}^3+C_{10}^4+\dots+C_{10}^{10}=$ $=2^{10}-C_{10}^0-C_{10}^1-C_{10}^2=1024-1-10-45=968$	**3p** **2p**
5.	$\vec{u}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MQ}$, unde $MNQP$ este paralelogram $m(\sphericalangle M)=90^\circ$, deci $MNQP$ este dreptunghi și $MQ=NP=10$	**2p** **3p**
6.	$\operatorname{tg}x+\frac{1}{\operatorname{tg}x}+2=0\Leftrightarrow\frac{(\operatorname{tg}x+1)^2}{\operatorname{tg}x}=0$ $\operatorname{tg}x=-1$ și, cum $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, obținem $x=\frac{3\pi}{4}$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$M(-1)=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(M(-1))=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&-1&1\\1&1&1\end{vmatrix}=$ $=(-1)+0+1-(-1)-0-1=0$	**2p** **3p**
b)	$\det(M(a))=\begin{vmatrix}1&1&1\\a+1&-1&1\\1&1&-a\end{vmatrix}=(a+1)(a+2)$, pentru orice număr real a $a=-2$ sau $a=-1$	**3p** **2p**
c)	Sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0), deci $a\in\mathbb{R}\setminus\{-2,-1\}$ și soluția sistemului este $\left(\frac{2a}{(a+1)(a+2)},\frac{2a^2+3a+2}{(a+1)(a+2)},\frac{1}{a+1}\right)$ $\frac{4a}{(a+1)(a+2)}+\frac{2a^2+3a+2}{(a+1)^2(a+2)}=0\Leftrightarrow 6a^2+7a+2=0$, deci $a=-\frac{2}{3}$ sau $a=-\frac{1}{2}$, care convin	**2p** **3p**

2.a)	$x*y=\frac{1}{10}xy-x-y+10+10=$ $=\frac{1}{10}x(y-10)-(y-10)+10=\frac{1}{10}(x-10)(y-10)+10$, pentru orice numere reale x și y	**2p** **3p**
b)	$\frac{1}{10}(x-10)^2+10\leq\frac{101}{10}\Leftrightarrow(x-10)^2\leq 1$ $x\in[9,11]$	**3p** **2p**
c)	$x*10=10$ și $10*x=10$, pentru orice număr real x $\log_2 1*\log_2 2*\ldots*\log_2 2018=((\log_2 1*\ldots*\log_2 1023)*10)*\log_2 1025*\ldots*\log_2 2018=$ $=10*(\log_2 1025*\ldots*\log_2 2018)=10$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=16x-\frac{1}{x}=$	**3p**
	$=\frac{16x^2-1}{x}=\frac{(4x-1)(4x+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$f(1)=8$, $f'(1)=15$, deci ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=15x-7$	**3p**
	$15\cdot\frac{2}{3}-7=3$, deci punctul $A\left(\frac{2}{3},3\right)$ aparține tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f	**2p**
c)	$x\in\left(\frac{1}{4},+\infty\right)\Rightarrow f'(x)>0$, deci f este strict crescătoare pe $\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$	**2p**
	Cum $\frac{1}{4}<\frac{1}{3}<\frac{1}{\sqrt{7}}<\frac{1}{2}$, obținem $f\left(\frac{1}{3}\right)<f\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)<f\left(\frac{1}{2}\right)$	**3p**
2.a)	$\int_0^1(x+3)f(x)dx=\int_0^1(2x+3)dx=\left(x^2+3x\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=1+3-0=4$	**2p**
b)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{2x+3}{x+3}dx=\int_0^1\left(2-\frac{3}{x+3}\right)dx=2x\Big\vert_0^1-3\ln(x+3)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=2-3(\ln 4-\ln 3)=2-3\ln\frac{4}{3}$	**2p**
c)	$I_n=\int_0^1 e^x(2x+3)^n dx=e^x(2x+3)^n\Big\vert_0^1-2n\int_0^1 e^x(2x+3)^{n-1}dx=$	**3p**
	$=e\cdot 5^n-3^n-2nI_{n-1}$, deci $I_n+2nI_{n-1}=e\cdot 5^n-3^n$, pentru orice număr natural n, $n\geq 1$	**2p**

Mult succes!