TEST FINAL 2- ANTRENAMENT BACALAUREAT– 2021 (MAT-INF)
Selecție probleme făcută de prof. G.A. - 14 IUNIE 2021

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numerele reale a și b, știind că $(a+b)(i+1)=(a-b+1)(i-1)$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Determinați numerele reale m, pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+1$ are valoarea minimă egală cu -3.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3 x=\log_x 3$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă ambele cifre pătrate perfecte.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,a)$, $B(0,-3)$ și $C(1,1)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că $AB+BC=AC$.

5p **6.** Determinați $a\in(0,\pi)$, știind că $\left(\sin\frac{\pi}{7}-\cos a\right)^2+\left(\cos\frac{\pi}{7}-\sin a\right)^2=2$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -a\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+ay+a^2z=0\\ x-y+z=2\\ x+y-az=-4\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=-1$.

5p **b)** Demonstrați că matricea $A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real a, $a\neq-1$ și $a\neq\frac{1}{3}$.

5p **c)** Determinați numerele reale a, pentru care sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0), iar $x_0=y_0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=-xy+2x+2y-2$.

5p **a)** Arătați că $x*y=2-(x-2)(y-2)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale x, pentru care $x*x=1$.

5p **c)** Demonstrați că, dacă m, n și p sunt numere întregi astfel încât $m*n*p=2$, atunci produsul numerelor m, n și p este divizibil cu 2.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Arătați că $f(x)\leq\frac{1}{e}$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+1$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)dx=\frac{11}{6}$.

5p **b)** Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{f(x)}dx$. Arătați că $I_{n+1}\leq I_n$ pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Determinați numărul real pozitiv a știind că $\int_0^a\frac{2x+1}{f(x)}dx=\ln 3$.

BAREM PENTRU AUTOEVALUARE

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(2a+1)+(2b-1)i=0$	**3p**
	Cum a și b sunt numere reale, obținem $a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$	**2p**
2.	$\Delta=m^2-4$	**2p**
	$-\frac{m^2-4}{4}=-3 \Leftrightarrow m^2-16=0 \Leftrightarrow m=-4$ sau $m=4$	**3p**
3.	$\log_3 x=\frac{1}{\log_3 x} \Rightarrow (\log_3 x+1)(\log_3 x-1)=0$	**3p**
	$x=\frac{1}{3}$ sau $x=3$, care verifică ecuația	**2p**
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	Pătratele perfecte de o cifră sunt 0, 1, 4 și 9, deci sunt $3\cdot 4=12$ numere naturale de două cifre care au ambele cifrele pătrate perfecte, adică sunt 12 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{12}{90}=\frac{2}{15}$	**2p**
5.	Punctele A, B și C sunt coliniare, deci $m_{AB}=m_{BC}$	**2p**
	$\frac{-3-a}{0+1}=\frac{1+3}{1-0} \Leftrightarrow a=-7$	**3p**
6.	$\sin^2\frac{\pi}{7}-2\sin\frac{\pi}{7}\cos a+\cos^2 a+\cos^2\frac{\pi}{7}-2\cos\frac{\pi}{7}\sin a+\sin^2 a=2 \Leftrightarrow 2-2\sin\left(\frac{\pi}{7}+a\right)=2$	**3p**
	Cum $a\in(0,\pi)$, din relația $\sin\left(\frac{\pi}{7}+a\right)=0$, obținem $a=\frac{6\pi}{7}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+1+1-0-0-0=2$	**3p**
b)	$\det(A(m))=\begin{vmatrix}-m&1&1\\1&-m&1\\1&1&-m\end{vmatrix}=(2-m)(m+1)^2$	**3p**
	Pentru orice număr real m, $m\neq -1$ și $m\neq 2$, obținem $\det(A(m))\neq 0$, deci matricea $A(m)$ este inversabilă	**2p**
c)	Pentru $m=2$, sistemul este compatibil nedeterminat și soluțiile sistemului sunt de forma $(1+\alpha,1+\alpha,\alpha)$, unde $\alpha\in\mathbb{R}$	**3p**
	Cum $x_0+2y_0+3z_0=9 \Leftrightarrow 1+\alpha+2(1+\alpha)+3\alpha=9 \Leftrightarrow \alpha=1$, soluția sistemului care verifică relația este $(2,2,1)$	**2p**
2.a)	$x*y=-2xy+10x+10y-50+5=$	**2p**
	$=-2x(y-5)+10(y-5)+5=-2(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere reale x și y	**3p**

b)	$x*5=5*y=5$, pentru x și y numere reale	**2p**
	$((1*2*3*4)*5)*6*7*8*9*10=5*(6*7*8*9*10)=5$	**3p**
c)	$-2(m-5)(n-5)+5=27 \Leftrightarrow (m-5)(n-5)=-11$	**2p**
	Cum m și n sunt numere naturale, obținem $m=4$, $n=16$ sau $m=16$, $n=4$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{(\ln x)'\cdot x-\ln x\cdot x'}{x^2}=$	**2p**
	$=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f'(e)=0$, $f'(x)>0$ pentru orice $x\in(0,e)$ și $f'(x)<0$ pentru orice $x\in(e,+\infty)$	**3p**
	$f(x)\le f(e)\Rightarrow f(x)\le\frac{1}{e}$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(x^2+x+1)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right)\right\|_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1=\frac{11}{6}$	**2p**
b)	$I_{n+1}-I_n=\int_0^1\frac{x^n(x-1)}{x^2+x+1}dx$ pentru orice număr natural nenul n	**2p**
	Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ și $x\in[0,1]$ avem $x^n\ge 0, x-1\le 0$ și $x^2+x+1>0\Rightarrow I_{n+1}\le I_n$	**3p**
c)	$\int_0^a\frac{2x+1}{f(x)}dx=\int_0^a\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx=\left.\left(\ln(x^2+x+1)\right)\right\|_0^a=\ln(a^2+a+1)$	**3p**
	$\ln(a^2+a+1)=\ln 3\Leftrightarrow a^2+a+1=3$ care are soluția pozitivă $a=1$	**2p**