

TEST FINAL 1- ANTRENAMENT BACALAUREAT– 2021 (MAT-INF)

Selecție probleme făcută de prof. G.A. - 14 Iunie 2021

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați numărul real x , știind că numerele 7 , $3x$ și $x^2 + 2$ sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
- 5p 2. Determinați numărul real m , știind că parabola asociată funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + m$ este tangentă axei Ox .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-9} = 32^x$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând o submulțime a mulțimii $A = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}\}$, aceasta să aibă cel mult două elemente.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$ și $C(1, 4)$. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul B și este paralelă cu mediana din A a triunghiului ABC .
- 5p 6. Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC în care $A = \frac{3\pi}{4}$ și $BC = \sqrt{2}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} -m & 1 & 1 \\ 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} -mx + y + z = -1 \\ x - my + z = -1 \\ x + y - mz = m \end{cases}$, unde m

este număr real.

- 5p a) Arătați că $\det(A(0)) = 2$.
- 5p b) Demonstrați că matricea $A(m)$ este inversabilă, pentru orice număr real m , $m \neq -1$ și $m \neq 2$.
- 5p c) Pentru $m = 2$, determinați soluția (x_0, y_0, z_0) a sistemului pentru care $x_0 + 2y_0 + 3z_0 = 9$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = -2xy + 10x + 10y - 45$.
- 5p a) Arătați că $x * y = -2(x - 5)(y - 5) + 5$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p b) Arătați că $1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 * 10 = 5$.
- 5p c) Determinați numerele naturale m și n , pentru care $m * n = 27$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$, $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f .

5p c) Demonstrați că, pentru orice număr real a , $a \in (-1, 1)$, ecuația $f(x) = a$ are soluție unică.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(x - 1)$.

5p a) Arătați că $\int_0^2 f(x)e^{-x} dx = 0$.

5p b) Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = 2$ are aria egală cu e .

5p c) Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-n}^1 (f(x) + e^x) dx = 0$.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$7 + x^2 + 2 = 2 \cdot 3x$ $x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = 3$	3p 2p
2.	$\Delta = 0 \Leftrightarrow 4 - 4m = 0$ $m = 1$	3p 2p
3.	$(2^{-1})^{4x-9} = 2^{5x} \Leftrightarrow -4x + 9 = 5x$ $x = 1$	3p 2p
4.	<p>Mulțimea A are $C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 = 2^6 = 64$ de submulțimi, deci sunt 64 de cazuri posibile</p> <p>Mulțimea A are $C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 = 1 + 6 + 15 = 22$ de submulțimi cu cel mult două elemente, deci sunt 22 de cazuri favorabile</p> $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{22}{64} = \frac{11}{32}$	2p 2p 1p
5.	<p>Punctul $M(1, 2)$ este mijlocul laturii BC</p> $m_{AM} = \frac{2-0}{1-(-1)} = 1$ <p>Ecuția dreptei care trece prin punctul B și este paralelă cu dreapta AM este $y = x - 1$</p>	1p 2p 2p
6.	$\frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{\sqrt{2}}{2 \sin \frac{3\pi}{4}} =$ $= 1$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$ $= 0 + 1 + 1 - 0 - 0 - 0 = 2$	2p 3p
b)	$\det(A(m)) = \begin{vmatrix} -m & 1 & 1 \\ 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & -m \end{vmatrix} = (2-m)(m+1)^2$ <p>Pentru orice număr real m, $m \neq -1$ și $m \neq 2$, obținem $\det(A(m)) \neq 0$, deci matricea $A(m)$ este inversabilă</p>	3p 2p
c)	<p>Pentru $m = 2$, sistemul este compatibil nedeterminat și soluțiile sistemului sunt de forma $(1 + \alpha, 1 + \alpha, \alpha)$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$</p> <p>Cum $x_0 + 2y_0 + 3z_0 = 9 \Leftrightarrow 1 + \alpha + 2(1 + \alpha) + 3\alpha = 9 \Leftrightarrow \alpha = 1$, soluția sistemului care verifică relația este $(2, 2, 1)$</p>	3p 2p
2.a)	$x * y = -2xy + 10x + 10y - 50 + 5 =$ $= -2x(y - 5) + 10(y - 5) + 5 = -2(x - 5)(y - 5) + 5$, pentru orice numere reale x și y	2p 3p
b)	$x * 5 = 5 * y = 5$, pentru x și y numere reale $((1 * 2 * 3 * 4) * 5) * 6 * 7 * 8 * 9 * 10 = 5 * (6 * 7 * 8 * 9 * 10) = 5$	2p 3p
c)	$-2(m - 5)(n - 5) + 5 = 27 \Leftrightarrow (m - 5)(n - 5) = -11$ Cum m și n sunt numere naturale, obținem $m = 4$, $n = 16$ sau $m = 16$, $n = 4$	2p 3p

1.a)	$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x \cdot 2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} =$ $= \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}, x \in \mathbb{R}$	<p>3p</p> <p>2p</p>
b)	$f(0) = 0, f'(0) = 1$ Ecuația tangentei este $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$, adică $y = x$	<p>2p</p> <p>3p</p>
c)	$f'(x) > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci f este strict crescătoare pe \mathbb{R} Cum $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1$ și funcția f este continuă, atunci pentru orice $a \in (-1, 1)$, ecuația $f(x) = a$ are soluție unică	<p>2p</p> <p>3p</p>
2.a)	$\int_0^2 f(x)e^{-x} dx = \int_0^2 e^x(x-1)e^{-x} dx = \int_0^2 (x-1) dx = \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big _0^2 =$ $= \frac{4}{2} - 2 = 0$	<p>3p</p> <p>2p</p>
b)	$\mathcal{A} = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (x-1)e^x dx = (x-2)e^x \Big _1^2 =$ $= 0 - (-1)e = e$	<p>3p</p> <p>2p</p>
c)	$\int_{-n}^1 (f(x) + e^x) dx = \int_{-n}^1 x e^x dx = (x-1)e^x \Big _{-n}^1 = (n+1)e^{-n}$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-n}^1 (f(x) + e^x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{e^n} = 0$	<p>3p</p> <p>2p</p>