Concursul MateInfoUB 2021
- 30 mai 2021 -

Problema 1. Fie $\mathcal{M}$ mulţimea tuturor matricelor pătratice A, cu 4 linii şi 4 coloane, care sunt inversabile şi au proprietatea: atât matricea A, cât şi matricea A^{-1} au toate elementele numere naturale.

(1) Notăm

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Arătaţi că $T^{-1} = T$.
Demonstraţi apoi că mulţimea $\mathcal{M}$ are cel puţin două elemente şi că formează un grup în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor.

(2) Determinaţi numărul de elemente ale mulţimii $\mathcal{M}$.

(3) Fie $\mathcal{H}$ mulţimea matricelor din $\mathcal{M}$, de forma:

$$\begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

(unde poziţiile în care apare $*$ pot fi completate cu numere naturale, alese astfel ca matricea obţinută să fie un element din mulţimea $\mathcal{M}$). Demonstraţi că $\mathcal{H}$ este un subgrup al grupului $(\mathcal{M}, \cdot)$.
Demonstraţi apoi că nu există numărul natural n astfel ca grupurile $(\mathcal{H}, \cdot)$ şi $(\mathbb{Z}_n, +)$ să fie izomorfe.

Problema 2. Pentru fiecare număr real a considerăm funcţia $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f_a(x) = \max\{\sin(x), \cos(x) + a\}.$$

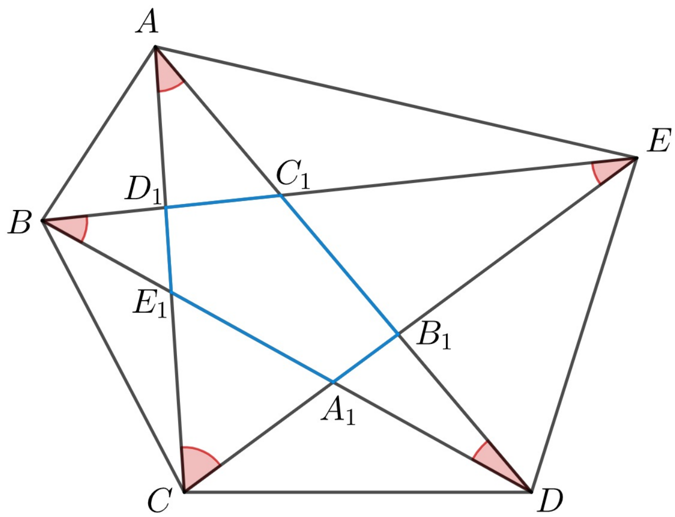
(1) Dacă $f_a(0) = 2$, calculaţi $f_a(\frac{3\pi}{4})$ şi $\int_0^{2\pi} f_a(x)dx$.

(2) Demonstraţi că pentru orice $x, y \in [0, \frac{\pi}{2}]$, are loc inegalitatea $f_1(\frac{x+y}{2}) \geq \frac{f_1(x)+f_1(y)}{2}$.
Găsiţi apoi un interval I de lungime maximă, care îl conţine pe 0, pe care funcţia f_2 verifică aceeaşi inegalitate, adică pentru orice $x, y \in I$ avem $f_2(\frac{x+y}{2}) \geq \frac{f_2(x)+f_2(y)}{2}$.

(3) Determinaţi toate numerele reale a pentru care funcţia f_a este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

Subiectele continuă şi pe verso!

Problema 3. Se consideră pentagonul convex $ABCDE$ (vezi figura de mai jos). Notăm cu a perimetrul pentagonului $ABCDE$, cu b suma lungimilor tuturor diagonalelor pentagonului $ABCDE$ şi cu c perimetrul pentagonului $A_1B_1C_1D_1E_1$ (ale cărui laturi sunt desenate cu albastru). Toate lungimile segmentelor ce apar în această problemă (laturi, diagonale, etc.) sunt măsurate cu aceeaşi unitate de măsură fixată.



(1) Demonstraţi că suma unghiurilor marcate pe figură cu roşu este $180°$.

(2) Demonstraţi că au loc următoarele inegalităţi: $a + c < b < 2a$.
Justificaţi apoi că dacă a, b, c sunt numere naturale prime atunci $a + b + c \geq 20$.

(3) Există un pentagon regulat $ABCDE$ astfel încât, pentru acesta, a şi b să fie numere naturale? Justificaţi răspunsul.

Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore.