

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică $M_{mate-info}$

Testul 11

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $\sqrt[3]{(6-\sqrt{2})^3} + \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = 5$.
- 5p** 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 3$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 2mx - 6$, unde m este număr real. Determinați numărul real m , știind că graficul funcției f intersectează axa Ox într-un punct în care și graficul funcției g intersectează axa Ox .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x^2 - 4x + 12) = \log_3 27$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă suma cifrelor divizibilă cu 3.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-4,0)$, $B(-1,3)$ și $C(1,m)$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care triunghiul ABC este dreptunghic în B .
- 5p** 6. Arătați că $\sin \frac{25\pi}{6} + \cos \frac{23\pi}{3} = 1$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} (1+a)x + y + z = 0 \\ x + (1+b)y + z = 0 \\ x + y + (1+c)z = 0 \end{cases}$, unde a , b și c sunt numere reale nenule.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(-2,0,2)) = -4$.
- 5p** b) Arătați că, dacă $abc + ab + ac + bc \neq 0$, atunci matricea $A(a,b,c)$ este inversabilă.
- 5p** c) Demonstrați că, dacă sistemul de ecuații admite și soluții diferite de soluția $(0,0,0)$, atunci numărul $N = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ este întreg.
2. Pe mulțimea $G = (0,2)$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \frac{xy}{xy - x - y + 2}$ și se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow (0,2)$, $f(x) = \frac{2}{x+1}$.
- 5p** a) Arătați că $1 * 1 = 1$.
- 5p** b) Demonstrați că $f(x) * f(y) = f(xy)$, pentru orice $x, y \in (0, +\infty)$.
- 5p** c) Determinați numărul natural n pentru care $f\left(\frac{1}{2}\right) * f\left(\frac{2}{3}\right) * f\left(\frac{3}{4}\right) * \dots * f\left(\frac{2020}{2021}\right) = \frac{2n}{n+1}$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x \ln x - x^2 + 3$.
- 5p** a) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 0$.
- 5p** b) Arătați că funcția f este convexă pe $(0,1)$.

5p c) Demonstrați că $2 \ln x < x - \frac{1}{x}$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$.

5p a) Arătați că $I_1 + \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = 1$.

5p b) Arătați că $I_2 = 2 - \frac{\pi}{2}$.

5p c) Demonstrați că $I_n \leq \ln 2$, pentru orice număr natural nenul n .