**Universitatea din Bucureşti** **22.05.2021**

**Facultatea de Matematică şi Informatică**

# Concursul MateInfoUB 2021

**1.** Considerăm şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ unde $x_n = \left(\frac{\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{3}+\sqrt[n]{5}}{3}\right)^n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ este:

A $\sqrt[3]{30}$ B $\ln \sqrt[3]{30}$ C e D 1 E $\infty$

**2.** Considerăm în numere complexe ecuaţia $|z|^2 + z = 3 + 4i$. Numărul de soluţii ale ecuaţiei este egal cu:

A 0 B 1 C 2 D 3 E 4

**3.** Fie funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite prin $f(x) = x^2 - 2x + 3$, respectiv $g(x) = -x^2 + 4x + a$. Valoarea lui $a$ astfel încât mulţimea

$$\{f(x)|\, x \in \mathbb{R}\} \cap \{g(x)|\, x \in \mathbb{R}\}$$

are exact un element este:

A $-\frac{3}{2}$ B $-2$ C $2$ D $\frac{3}{2}$ E $-6$

**4.** Fie pătratul $A_1A_2A_3A_4$ în care notăm $M_1$ (respectiv $M_2, M_3, M_4$) mijlocul lui $[A_1A_2]$ (respectiv al lui $[A_2A_3]$, $[A_3A_4]$, $[A_4A_1]$). Fie $\{T_1\} = A_1M_2 \cap A_4M_1$, $\{T_2\} = A_1M_2 \cap A_2M_3$, $\{T_3\} = A_2M_3 \cap A_3M_4$, $\{T_4\} = A_3M_4 \cap A_4M_1$. Atunci raportul dintre ariile patrulaterelor $T_1T_2T_3T_4$ şi $A_1A_2A_3A_4$ este egal cu:

A $\frac{1}{4}$ B $\frac{1}{5}$ C $\frac{1}{6}$ D $\frac{1}{8}$ E $\frac{2}{5}$

**5.** Fie $(G, \star)$ un grup finit cu elementul neutru $e$ şi fie $a$ un element al lui $G$. Ordinul lui $a$ este cel mai mic număr natural $n$ pentru care $\underbrace{a \star a \star \cdots \star a}_{\text{de } n \text{ ori}} = e$. În care dintre următoarele grupuri de clase de resturi, elementul $\hat{3}$ are ordinul 3? (Am notat cu $(U(\mathbb{Z}_n), \cdot)$ grupul multiplicativ al elementelor inversabile din inelul $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$.)

A $(\mathbb{Z}_3, +)$ B $(\mathbb{Z}_6, +)$ C $(U(\mathbb{Z}_{10}), \cdot)$ D $(U(\mathbb{Z}_{13}), \cdot)$ E $(\mathbb{Z}_8, +)$

**6.** Alegem la întâmplare tripletul de numere $(a, b, c)$ cu $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4\}$. Cu numerele alese, definim şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, descris prin $x_n = a\sqrt{n^2+1} + b\sqrt{n^2+2} - c\sqrt{n^2+3}$. Care este probabilitatea ca, pentru alegerea făcută, şirul să aibă limită finită?

A $\frac{3}{32}$ B 0 C 1 D $\frac{1}{64}$ E $0,5$

**7.** În pătratul $ABCD$, cu latura de 1, alegem punctele $P$ şi $Q$ pe segmentele $AB$ şi respectiv $AD$, astfel ca $CP \perp PQ$. Valoarea maxim posibilă a lungimii segmentului $AQ$, când $P$ şi $Q$ variază, este :

A $\frac{1}{4}$ B $\frac{1}{2}$ C $\frac{3}{4}$ D 1 E $\frac{\sqrt{2}}{2}$

**8.** Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată prin

$$f(x) = \begin{cases} x+1, \text{ dacă } x < 2 \\ x^2 - 7x + 11, \text{ dacă } x \in [2, 6]. \\ -x + 9, \text{ dacă } x > 6 \end{cases}$$

Atunci mulţimea $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq f(x) \leq 1\}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $[-2,0] \cup [2,3] \cup [4,5] \cup [8,10]$ $\boxed{\text{B}}$ $[-2,0] \cup [2,3] \cup [8,10]$ $\boxed{\text{C}}$ $[-2,0] \cup [2,5] \cup [8,10]$
$\boxed{\text{D}}$ $[-2,0] \cup [4,5] \cup [8,10]$ $\boxed{\text{E}}$ $[-2,0] \cup [8,10]$

**9.** Fie $\mathcal{A}$ mulţimea graficelor funcţiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, unde $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, pentru care punctele de intersecţie cu axele sunt vârfurile unui triunghi echilateral. Numărul de elemente ale mulţimii $\mathcal{A}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 0 $\boxed{\text{B}}$ 2 $\boxed{\text{C}}$ 3 $\boxed{\text{D}}$ 4 $\boxed{\text{E}}$ 6

**10.** Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+|1+x|} + \frac{1}{1+|1-x|}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Atunci numărul valorilor parametrului real $m$ pentru care ecuaţia $f(x) = m$ are exact 3 soluţii este:

$\boxed{\text{A}}$ 0 $\boxed{\text{B}}$ 1 $\boxed{\text{C}}$ 2 $\boxed{\text{D}}$ 3 $\boxed{\text{E}}$ 4

**11.** Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabilă cu proprietatea că $f(0) = 0$ şi $f'(x)(1+x^2) \geq 1 + f^2(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Atunci despre limita $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ putem afirma că:

$\boxed{\text{A}}$ este 0 $\boxed{\text{B}}$ este $\frac{\pi}{2}$ $\boxed{\text{C}}$ este 1 $\boxed{\text{D}}$ este $\infty$ $\boxed{\text{E}}$ nu există

**12.** Considerăm $ABCD$ un patrulater convex. Fie mulţimea

$$\mathcal{M} = \{P \in \mathrm{Int}(ABCD) \mid |\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PD}| \text{ este minim posibil}\}.$$

Atunci numărul de elemente ale mulţimii $\mathcal{M}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 0 $\boxed{\text{B}}$ 1 $\boxed{\text{C}}$ 2 $\boxed{\text{D}}$ 4 $\boxed{\text{E}}$ infinit

**13.** Fie $ABC$ un triunghi isoscel ascuţitunghic, cu vârful în $A$ şi fie $M$ mijlocul laturii $[BC]$. Fie $E \in [AB], F \in [AC]$ cu $ME \perp AB, MF \perp AC$. Dacă $\mathcal{S}_{MEF} = \frac{3}{16}\mathcal{S}_{ABC}$ (am notat cu $\mathcal{S}$ aria triunghiului respectiv), atunci măsura unghiului $\widehat{BAC}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $30°$ $\boxed{\text{B}}$ $45°$ $\boxed{\text{C}}$ $60°$ $\boxed{\text{D}}$ $72°$ $\boxed{\text{E}}$ $15°$

**14.** Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x|x+a| + |x+b|$, unde $a$ şi $b$ sunt două numere întregi, fixate. Pentru câte perechi $(a, b)$ funcţia $f$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$?

$\boxed{\text{A}}$ 0 $\boxed{\text{B}}$ 1 $\boxed{\text{C}}$ 2 $\boxed{\text{D}}$ 3 $\boxed{\text{E}}$ o infinitate

**15.** Fie $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Numărul legilor de compoziţie $*$ definite pe mulţimea $A$, pentru care $(A, *)$ este grup izomorf cu $(\mathbb{Z}_4, +)$, iar ordinul lui 3 în acest grup este 2, este :

$\boxed{\text{A}}$ 2 $\boxed{\text{B}}$ 6 $\boxed{\text{C}}$ 24 $\boxed{\text{D}}$ 36 $\boxed{\text{E}}$ 1

**16.** Valoarea integralei $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x \cdot \mathrm{arctg}(x)}{1+e^x} dx$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{\pi}{2} - 1$ $\boxed{\text{B}}$ $\frac{\pi}{2} + 1$ $\boxed{\text{C}}$ $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ $\boxed{\text{D}}$ $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$ $\boxed{\text{E}}$ 1

**17.** Fie $M$ o mulţime cu 2021 elemente. Valoarea minimă a numărului $m$ astfel încât oricare 3 submulţimi ale lui $M$ cu câte $m$ elemente să aibă intersecţia nevidă este:

$\boxed{\text{A}}$ 3 $\boxed{\text{B}}$ 1346 $\boxed{\text{C}}$ 1348 $\boxed{\text{D}}$ 1355 $\boxed{\text{E}}$ 2018

**18.** Numerele reale $a$ şi $b$ sunt alese astfel ca polinomul $P(X) = X^3 - X^2 + aX - b$ să aibă trei rădăcini reale şi pozitive. Valoarea maxim posibilă a lui $a - b$ este:

A $0$ B $\frac{1}{27}$ C $\frac{8}{27}$ D $1$ E $\sqrt{3}$

**19.** Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ o matrice care are toate elementele de pe prima coloană egale cu 1, restul elementelor matricei putând lua valorile $-1, 0$ sau $1$. Numărul de valori distincte pe care le poate lua $\det(A)$ este:

A $7$ B $9$ C $11$ D $27$ E $729$

**20.** Notăm cu $(U(A), \cdot)$ grupul multiplicativ al elementelor inversabile din inelul $(A, +, \cdot)$. Pentru câte valori ale numărului natural $n$, cu $n \geq 5$, asocierea $\hat{x} \mapsto \overline{4x+1}$ defineşte un morfism de la grupul $(\mathbb{Z}_6, +)$ la grupul $(U(\mathbb{Z}_n), \cdot)$? ($\hat{x}$ este clasa numărului $x$ modulo 6, iar $\overline{y}$ este clasa numărului $y$ modulo $n$)

A $1$ B $2$ C $4$ D $5$ E o infinitate

**21.** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi periodică, de perioadă $T$, unde $T > 0$ şi fie $F$ o primitivă a sa. Care dintre următoarele condiţii ne asigură că şi $F$ este funcţie periodică?

A $T = 2\pi$ B $f$ este funcţie pară C $\int\limits_0^T f(x)dx = 0$

D $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ E Graficul lui $f$ are o axă de simetrie.

**22.** Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) =$ distanţa de la $x$ la cel mai apropiat punct din intervalul $[3, 5]$. Numărul de valori întregi ale parametrului $m$ pentru care ecuaţia $f(f(x)) = m$ are exact patru soluţii reale este:

A $0$ B $1$ C $2$ D $3$ E $5$

**23.** Fie $M$ mulţimea tuturor numerelor naturale nenule $n$ pentru care grupurile $(U(\mathbb{Z}_n), \cdot)$ şi $(\mathbb{Z}_2, +)$ sunt izomorfe, unde $(U(A), \cdot)$ este grupul multiplicativ al elementelor inversabile din inelul $(A, +, \cdot)$. Numărul de elemente ale mulţimii $M$ este:

A $1$ B $2$ C $3$ D $4$ E $5$

**24.** Cercurile de centre $O_1$ şi $O_2$ trec fiecare prin centrul celuilalt şi se intersectează în $A$ şi $B$. O secantă oarecare dusă prin $A$ mai intersectează cercurile în $M_1$ şi $M_2$, astfel ca punctele $O_1, O_2, M_1$ şi $M_2$ să fie distincte şi să determine un patrulater convex. Care este maximul raportului dintre aria acestui patrulater şi aria porţiunii comune delimitată de cele două discuri?

A $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ B $\frac{9\sqrt{3}}{8\pi - 6\sqrt{3}}$ C $\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{6}$ D $\frac{3}{2}$ E $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$