Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Testul 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că, dacă $z_1 = 1 - 2i$ și $z_2 = 1 + \frac{1}{2}i$, unde $i^2 = -1$, atunci $z_1 + z_2 = z_1 z_2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, astfel încât $(f \circ f)(x) = 2f(x-1)$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x+1} \cdot 2^x = 50 \cdot 7^{x-1}$.

5p **4.** Determinați numărul funcțiilor $f:\{0,2,4\} \to \{3,5,7,9\}$ cu proprietatea $f(2) \le 8$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy, se consideră punctele $A(-2,4)$, $B(2,0)$ și C astfel încât $AC = BC$. Determinați ecuația dreptei d, care trece prin punctul C și este perpendiculară pe dreapta AB.

5p **6.** Determinați $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\cos x = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\sin x + 1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A(x) = \begin{pmatrix} 4^x & 0 \\ 0 & 9^x \end{pmatrix}$, unde x este număr real și $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det(A(x)) = 6^{2x}$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $A(x) \cdot B = B \cdot A(x)$.

5p **c)** Demonstrați că orice matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $X \cdot X = A(1)$ are toate elementele numere întregi.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = 2x^2 + xy + 2y^2$.

5p **a)** Arătați că $2 \circ 1 = 12$.

5p **b)** Se consideră numerele reale a, b și c astfel încât $2a + 2b + c \ne 0$. Știind că $c \circ a = c \circ b$, demonstrați că $a = b$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $x \circ (x+1) = 5x^3 + 2$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\ln x + a(x+1)$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \ln x + 1 + a$, $x \in (0,+\infty)$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Pentru $a = 1$, determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice număr real a, funcția f este convexă.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + e^x$.

5p **a)** Arătați că $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = -\frac{1}{e}$.

5p **b)** Calculați $\int_{0}^{1} x f\left(x^2\right)dx$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n = \int_0^2 x^n \left(f(x) - 2x\right)dx$. Demonstrați că $I_{n+1} + (n+1)I_n = 2^{n+1}e^2$, pentru orice număr natural nenul n.