

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Județeană și a Municipiului București, 7 Martie 2009

CLASA a VII-a

Problema 1. Fie m și n numere naturale nenule cu proprietatea că 5 divide $2^n + 3^m$. Să se arate că 5 divide $2^m + 3^n$.

Problema 2. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic în care M și N sunt mijloacele laturilor AB , respectiv AC , iar S este un punct mobil pe latura (BC) . Să se arate că $(MB - MS)(NC - NS) \leq 0$.

Problema 3. Fie a și b două numere naturale. Să se arate că numărul $a^2 + b^2$ este diferența a două pătrate perfecte dacă și numai dacă ab este număr par.

Problema 4. Se consideră un triunghi echilateral ABC . Punctele M , N și P sunt situate pe laturile AC , AB și BC , respectiv, astfel încât $\angle CBM = \frac{1}{2}\angle AMN = \frac{1}{3}\angle BNP$ și $\angle CMP = 90^\circ$.

- Să se arate că triunghiul NMB este isoscel.
- Să se determine măsura unghiului $\angle CBM$.

Timp de lucru 3 ore + 1/2 oră pentru întrebări lămuritoare asupra enunțurilor
Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Societatea de Științe Matematice din Romania

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Județeană și a Municipiului București, 7 Martie 2009

CLASA A VII-a, SOLUȚII ȘI BAREMURI

Problema 1. Fie m și n numere naturale nenule cu proprietatea că 5 divide $2^n + 3^m$. Să se arate că 5 divide $2^m + 3^n$.

Soluție Ultima cifră a puterilor lui 2 și 3 se repetă din 4 în 4, deci vom considera $m = 4k + a$ și $n = 4p + b$, cu $a, b = 0, 1, 2, 3$ **1 punct**

Ultima cifră a lui 2^n este 2,4,8,6 pentru $b = 1, 2, 3, 0$ respectiv, iar ultima cifră a lui 3^m este 3,9,7,1 pentru $a = 1, 2, 3, 0$ respectiv. **2 puncte**

Numărul $2^n + 3^m$ are ultima cifră 5 în următoarele cazuri:

- i) $a = 2, b = 0$;
- ii) $a = b = 1$;
- iii) $a = 0, b = 2$;
- iv) $a = b = 3$ **2 puncte**

În toate cele 4 situații de mai sus ultima cifră a lui $2^m + 3^n$ este 5, ceea ce trebuia arătat. **2 puncte**

Problema 2. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic în care M și N sunt mijloacele laturilor AB , respectiv AC , iar S este un punct mobil pe latura (BC) . Să se arate că $(MB - MS)(NC - NS) \leq 0$.

Soluție. Fie D piciorul înălțimii din A . Atunci triunghiurile BDM și DCN sunt isoscele, deoarece $MB = MD$ și $NC = ND$ **2 puncte**

Dacă $S = D$, atunci $MB - MS = 0$, de unde rezultă cerința. . . **1 punct**

Dacă S se află pe segmentul (BD) , atunci $MB > MS$ și $NS > NC$, deci $(MB - MS)(NC - NS) < 0$ **2 puncte**

Analog dacă S aparține segmentului (DC) **2 puncte**

Problema 3. Fie a și b două numere naturale. Să se arate că numărul $a^2 + b^2$ este diferența a două pătrate perfecte dacă și numai dacă ab este număr par.

Soluție. Pentru implicația directă, presupunem prin absurd că numărul ab este impar. Atunci a și b sunt numere impare, deci $a^2 + b^2$ este de forma $4k + 2$ **2 puncte**

Deoarece $a^2 + b^2 = m^2 - n^2 = (m - n)(m + n)$, observăm că dacă m, n au aceeași paritate rezultă că $a^2 + b^2$ este multiplu de 4, iar dacă m, n au parități diferite găsim $a^2 + b^2$ impar, contradicție..... **2 puncte**

Pentru implicația contrară, să observăm că $a^2 + b^2 = 4s$, dacă și a și b sunt pare, sau $a^2 + b^2 = 2r + 1$, dacă doar unul este par. **2 puncte**

În primul caz scriem $4s = (s + 1)^2 - (s - 1)^2$, iar în cel de-al doilea caz avem $(r + 1)^2 - r^2$, ceea ce încheie demonstrația. **1 punct**

Problema 4. Se consideră un triunghi echilateral ABC . Punctele M, N și P sunt situate pe laturile AC, AB și BC , respectiv, astfel încât $\angle CBM = \frac{1}{2}\angle AMN = \frac{1}{3}\angle BNP$ și $\angle CMP = 90^\circ$.

- Să se arate că triunghiul NMB este isoscel.
- Să se determine măsura unghiului $\angle CBM$.

Soluție. a) Fie x măsura unghiului $\angle MBC$. Atunci $\angle ABM = 60^\circ - x$ și $\angle NMB = 60^\circ - x$, deci $NM = NB$ **2 puncte**

b) Fie Q un punct pe semidreapta $(CA$ astfel încât $CQ = 2 \cdot CA$. Atunci $\triangle QPC \sim \triangle BMC$ și $QB \perp BC$. Înseamnă că $\angle PQC = x$ **1 punct**

Fie O mijlocul segmentului PQ . Cum PQ este ipotenuză comună în triunghiurile BPQ și MPQ , rezultă că $OM = OB = \frac{1}{2} \cdot PQ$. Din $\angle BOM = 60^\circ$ rezultă că triunghiul OBM este echilateral, deci $ON \perp BM$ **1 punct**

Fie S și T punctele de intersecție ale dreptei BM cu PN și PQ respectiv. Avem $\angle BTN = \angle QSM = 120^\circ - 2x$, deci triunghiul PST este isoscel cu $PS = PT$ **1 punct**

Dacă $T \neq S$, perpendiculara din P pe segmentul TS taie dreapta ON , fiind bisectoarea unghiului $\angle NPO$, în contradicție cu $ON \perp BM$. Rezultă $T = S$, deci punctele P, N, O, Q sunt coliniare. **1 punct**

De aici $PB = PM$ și $x = \angle PBM = \angle PMB = 15^\circ$ **1 punct**